Theoretisch-praktisch-geometrisches

Zeichnenbuch

für Schul- und Selbstunterricht.

Zum Gebrauche für alle deutschen Staaten eingerichtet

von

M. Nast,

Lehrer; Verfasser des Rechnenbuches, hauptsächlich zum Gebrauche in den Zollvereinsstaaten rc., des unentbehrlichen Taschenbuches für Geschäfts-, Kaufleute und Oeconomen rc.; des vollständigen Taschenbuches für Flächen- und Körperberechnung rc. der Feldfortification und mehrer arithmetischen Schriften.

Als Ergänzung zu dessen „Taschenbuch" bearbeitet, daß Jeder alles hierher einschlagende in kurzer Zeit, sowie alle dazu gehörigen Berechnungen, Beweise und Feldmeßkunst rc. (ohne Buchstabenrechnung) von selbst erlernen kann.

(Man beachte das Inhaltsverzeichniß auf folgendem Blatte.)

Nulla dies sine linea.

Mannheim.
Im Verlage des Verfassers.
1869.

Berichtigung:

Taf. II. Fig. 91 ziehe noch von f nach g 5, den übrigen gleiche Quadrate.

Siehe ferner S. VI. „Berichtigungen."

Mannheim.
Buchdruckerei von J. Schneider.
1869.

Inhalt
des
theoretisch = praktisch = geometrischen Zeichnenbuches.

Berichtigungen.

Seite	4,	fünfte	Zeile	von	oben	muß	„lege"	statt	„setze"	stehen.
„	11,	zwölfte	„	„	„	„	q	„	p	„
„	23.	zehnte	„	„	unten	„	vorn „4)"			„
„	32,	achte	„	„	oben	„	94	„	93	„
„	32,	zehnte	„	„	„	„	94 c	„	93	„
„	35,	erste	„	„	unten	„	„Würfel"	„	„Winkel"	„

I. Abschnitt.

Geometrie.

Zeichnen und Aufnehmen der Linien, Flächen und Körper.

(Die Berechnungen sind, wie schon bemerkt, im Taschenbuch (III. und IV. Auflage) enthalten; jedoch folgen noch weitere Ergänzungen in diesem Werke.)

§ 1.

a) Das Wort Geometrie kommt aus dem Griechischen und heißt eigentlich Feldmeßkunst; wir verstehen aber im weiteren Sinne diese Wissenschaft darunter, welche Linien, Flächen und auch Körper ausmessen lehrt; sie wird daher auch eingetheilt: 1) in die Longimetrie, welche von den Linien handelt; 2) in die Planimetrie, welche die Lehre von den Flächen begreift, und 3) in die Stereometrie, welche sich mit der Ausmessung der Körper beschäftigt. b) Um aber einen Gegenstand nach obiger Wissenschaft zu behandeln, wird es öfters nöthig, daß man ihn aufzeichne; es muß daher die hierher gehörige Zeichnenkunst zuerst oder besser gleich mit eingeübt werden. Zur Ausübung derselben bedarf man im strengen Sinne nichts, als: 1) einen guten Stockzirkel, d. i. ein Zirkel, aus welchem sich ein Fuß herausnehmen läßt, und an dessen Stelle sich eine eigens dazu gemachte Reißfeder oder ein Bleistift hineinschrauben läßt; 2) einen guten Bleistift; 3) eine gute Reißfeder; 4) ein richtiges Lineal; 5) gutes, zum Zeichnen eigens gemachtes Papier; 6) ein richtig gemachtes Reißbrett, um

das Papier darauf zu spannen*); 7) guten Tusch (eine besondere schwarze Farbe, welche man in eine kleine Schaale 2c. mit etwas Wasser abreibt, mit welcher man nach geendigter Zeichnung die mit Blei gezogenen Linien auszieht (in Ermanglung des Tusches wird oft Tinte genommen, welches jedoch nicht sein soll); 8) Gummi elasticum, mit welchem man die mit Blei allenfalls unrichtig gezogenen Linien 2c. wieder auswischt und überhaupt, wenn es nöthig, die Zeichnung damit reinigt. c) Ferner merke man sich die Bedeutung der Wörter 1) Grundsatz, 2) Lehrsatz und Beweis.

1) Ein Grundsatz ist ein solcher Satz, dessen Wahrheit man sogleich einsieht, wenn man nur das verstanden hat, was durch den Satz gesagt wird; z. B.: 1) Eine jede Größe ist sich selbst gleich (denn 3 = 3). 2) Zwei Dinge, welche einem dritten gleich sind, sind sich selbst einander gleich; denn wenn 3 Linien A, B, C, von denen die eine A so lang als die C, und die Linie B auch so lang als die C ist, so muß auch natürlich A so lang als B sein. (Wenn A = C und B = C, so ist auch A = B. 3) Das Ganze ist größer als sein Theil (als ein Theil von dem Ganzen). Ein Grundsatz bedarf daher keines Beweises; sondern er dient für den Beweis der Wahrheit anderer Sätze, weswegen er auch Grundsatz heißt. 2) Ein Lehrsatz ist ein solcher, dessen Wahrheit man nicht gleich einsieht, ob man schon den Sinn desselben aufgefaßt hat, sondern dessen Wahrheit erst aus Grundsätzen oder andern, als schon wahr erwiesenen, Sätzen dargethan werden muß; z. B. wenn eine gerade Linie auf eine horizontale aufgestellt ist und zwei Winkel bildet, was für es auch sein mögen, so

*) Um Papier auf das Reißbrett zu spannen, biege man den Bogen am Rande auf allen vier Seiten einen starken Finger breit ein, bestreiche dann diesen eingebogenen Raum mit Buchbinderkleister, oder mit naßgemachtem Mundleim bis an die Kante (den Bug), wobei man aber vorsichtig sein muß, daß nichts davon auf den innern Raum oder auf das Reißbrett komme; alsdann nehme man einen in reines Wasser getauchten Schwamm, mache mit diesem das ganze Papier auf der nämlichen Seite, wo der eingebogene Rand bestrichen ist, aber diesen nicht mit, gleichförmig feucht, aber nicht zu naß, alsdann lege man diese Seite auf das Reißbrett, ziehe es nach und nach mit den Fingerspitzen an den vier Seiten so lange an, doch nicht zu stark, bis es keine Blasen mehr hat, und lasse es nachdem langsam trocknen.

sind diese zwei rechten gleich. Ob wir hier gleich verstehen, was durch diesen Satz gesagt ist, so sehen wir aber doch nicht gleich ein, ob dieses auch so ist, und wir müssen also erst von der Wahrheit überzeugt werden, d. h. also: es muß bewiesen werden, daß es so und nicht anders ist; und dieses geschieht durch Grund- oder andere schon als wahr erkannte Sätze. 3) Ein Beweis ist daher die Darstellung der Wahrheit eines Satzes aus Grundsätzen, oder aus andern, als wahr anerkannten, Sätzen.

§ 2.

a) Ein Punkt ist etwas, das gar keine Ausdehnung hat, also gar keine Theile hat, daher man sich einen Punkt eigentlich nur denken kann. Einen solchen (wahren) Punkt nennt man einen mathematischen Punkt. Bezeichnen wir aber die Stelle eines solchen Punktes durch die Tinte, Kreide oder auf der Erde durch einen Pfahl ꝛc., so heißt dieses ein physischer Punkt. b) Denken wir uns einen Punkt, welcher sich von einem Orte zu einem andern bewegt, so entsteht durch diese Bewegung eine Linie. c) Eine gerade Linie ist also die Bewegung eines Punktes in einer unveränderten Richtung, und d) eine krumme Linie ist die Bewegung eines Punktes in veränderter Richtung. e) Eine Linie hat also nur eine Ausdehnung nach der Länge, ohne alle Breite und Dicke; daher läßt sich eine wahre Linie auch nur denken, und eine solche Linie heißt eine mathematische Linie. Bezeichnen wir eine solche Linie auf dem Papier oder auf der Erde, so heißt sie eine physische Linie. Eine gerade Linie ist also eine Ausdehnung nach der Länge, ohne alle Breite und Dicke, in welcher alle Theile in einer und derselben Richtung liegen. Die Ende einer Linie sind Punkte. Wenn man daher von der Entfernung zweier Punkte redet, so versteht man diese gerade Linie darunter, und die gerade Linie ist auch die kürzeste, welche zwischen zwei Punkte gezogen werden kann.

1) *) Eine gerade Linie zu ziehen (siehe Taf. 1. Fig. 1). Soll von dem Punkte a nach dem Punkte b eine gerade Linie gezogen werden, so lege man das Lineal genau

*) Die Andeutung: „Aufgabe“ und „Auflösung“ sind weggelassen, da man ja leicht sieht, was eine Aufgabe und welches die Auflösung ist.

an beide Punkte an, und ziehe dicht an dem Lineal mit einem fein gespitzten Bleistift von a nach b eine Linie*).

2) Eine gerade Linie zu verlängern (Fig. 2). Soll eine gerade Linie a b in gerader Richtung, z. B. bis nach c verlängert werden, so setze man das Lineal genau an b und c an, aber so, daß es auch bei b noch ein gutes Stück gegen a genau an der Linie mit anliege (denn je weiter man an die Linie a b anlegt, desto mehr kann man von der geraden Richtung der verlängerten Linie überzeugt sein) und ziehe die Linie. Oder (Fig. 2 b) man setze den einen Fuß des Zirkels in den Endpunkt b, öffne ihn beliebig und mache mit dieser Oeffnung in die Linie a b den Punkt d, mache mit gleicher Oeffnung aus d oberhalb der Linie a b einen Bogen e f und unterhalb derselben einen Bogen g h, setze dann den Zirkel in den Punkt b und durchschneide mit beibehaltener (gleicher) Oeffnung die Bögen e f und g h, so erhält man die Punkte i und k; nun setze man den Zirkel in einen dieser Punkte i, öffne ihn gegen c hin, beschreibe einen Bogen l m, setze dann den Zirkel in k, durchschneide mit beibehaltener Oeffnung den Bogen l m, so erhält man den Punkt n, nun lege man das Lineal an die Linie a b und den Punkt n und ziehe die Linie nach c.

f) Ein Punkt entsteht überall, wo sich zwei gerade oder krumme Linien durchschneiden, und ein solcher Punkt heißt Durchschnittspunkt. Will man daher einen Punkt bezeichnen, so geschieht dieses am besten durch zwei kleine sich schneidende Linien [+]**). Eine Linie besteht wieder aus kleinern Linien.

g) Von den krummen Linien (vergl. d) gehört in die Elementar-Geometrie der Kreis. Wenn wir uns eine gerade Linie (Fig. 3, c b) denken, welche sich um einen feststehenden Punkt (c) ganz herum bewegt, so entsteht durch diese Bewegung ein Kreis. Ein Kreis ist also eine von einem Punkte immer gleich weit entfernte in sich wieder zurückkehrende Linie.

---

*) Bei dem Zeichnen hat man daher darauf zu sehen, daß die Punkte und Linien so fein als möglich gemacht werden, damit man den mathematischen so nahe als möglich komme.

**) Nicht die Buchstaben sind in einer Zeichnung die Punkte, sondern die ihnen zunächst gelegenen Merkmale; so ist in Fig. 2 nicht b der Punkt, sondern dort, wo das Strichelchen und die Linie sich einander durchschneiden.

3) Einen Kreis zu beschreiben. Soll ein Kreis beliebig beschrieben werden, so setze man den einen Fuß des Zirkels in einen Punkt (Fig. 3, c) ein, öffne den Zirkel beliebig (hier bis nach b), lasse den eingesetzten Fuß aber unverrückt stehen und drehe den Zirkel so lange herum, bis der andere Zirkelfuß, in welchen der Bleistift oder die Reißfeder eingeschraubt ist, den Anfang der Linie wieder erreicht hat. h) Eine auf diese Art gezogene Linie (Fig. 3, B F G; bis wieder eine neue Figur bemerkt wird, bleibe man bei Fig. 3 stehen), heißt eine Kreislinie, Umkreis oder Peripherie. i) Der Punkt c, um welchen der Kreis bezogen wurde, heißt der Mittelpunkt oder das Zentrum.

k) Eine gerade Linie c b, welche von dem Mittelpunkte bis zu irgend einem Punkte der Peripherie gezogen wird, heißt der Halbmesser oder Semidiameter.

In einem Kreise lassen sich also so viel Halbmesser ziehen, als Punkte in der Peripherie angenommen (gedacht) werden können; und, Grundsatz: alle Halbmesser sind einander gleich, weil alle Punkte der Peripherie gleich weit von dem Mittelpunkt entfernt sind (vergl. g). 1) Eine gerade Linie, welche von einem Punkt der Peripherie nach einem andern Punkt derselben, aber durch den Mittelpunkt, gezogen ist, heißt der Durchmesser oder Diameter des Kreises (h i und b l sind Durchmesser von dem Kreise B F G). m) Da ein Durchmesser gleich zwei Halbmessern ist, so sind auch alle Durchmesser, welche in ein und demselben Kreis gezogen werden können, einander gleich. n) Eine Linie, welche von einem Punkte der Peripherie zu einem andern, in derselben, aber nicht durch den Mittelpunkt gezogen ist, heißt eine Sehne oder Chorde (m o). o) Ein Kreisbogen ist irgend ein Theil von der Peripherie (m n o). p) Durch die Endpunkte eines jeden in einem Kreise gezogenen Durchmessers wird die Peripherie in zwei gleiche Theile getheilt, welche Halbkreise heißen. (b n l; b G l; h n i; h G i.)

q) Haben mehrere Kreise einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, so heißen sie concentrische Kreise (Fig. 4), und liegen mehrere Kreise in einander, von denen ein jeder seinen eigenen Mittelpunkt hat, so heißen sie excentrische Kreise (Fig. 5); und der Rand zwischen zwei Umkreisen wird Kreisrand genannt (Fig. 4, a b c).

r) Wenn eine gerade Linie auf irgend einem Punkte einer geraden Linie so steht, daß sie sich weder zur Rechten, noch zur Linken neigt, so heißt sie eine senkrechte oder eine lothrechte Linie, oder ein Perpendikel (Fig. 6).

6) Eine senkrechte Linie aus irgend einem Punkt auf eine Linie zu errichten. Soll auf die Linie a b aus dem Punkte c eine Senkrechte c d errichtet werden, so setze man den Zirkel in den Punkt c, öffne ihn beliebig, und bezeichne mit dieser Oeffnung, welche aber nicht verändert werden darf, links und rechts des Punktes c zwei Punkte e und f; nun öffne man den Zirkel beliebig weiter, setze ihn in den Punkt e, beschreibe oberhalb der Linie gegen c hin einen Bogen g h*), setze dann den Zirkel mit der nämlichen Oeffnung in f ein, und ziehe abermals einen Bogen i k über c; nun schneiden sich die beiden Bögen in dem Punkte e. Zieht man jetzt durch den Punkt c und den Durchschnittspunkt e eine Linie c d, so steht diese senkrecht auf a b. Eine gerade liegende Linie (a b) heißt eine wagrechte oder eine horizontale Linie.

7) Soll aber auf dem Endpunkt b der Linie a b (Fig. 7) eine senkrechte errichtet werden, so wähle man sich einen beliebigen Punkt, oberhalb der Linie z. B. den Punkt c, setze den Zirkel in diesen Punkt c ein, öffne ihn bis an den Endpunkt b und beschreibe einen Kreis; nun durchschneidet dieser die Linie a b in einem Punkte d; an diesen Punkt d und an den Punkt c lege man das Lineal und ziehe eine Linie, welche dann den Kreis oben in dem Punkt e durchschneidet; durch den Durchschnittspunkt e und den Endpunkt b ziehe man jetzt die Linie b f, so steht diese senkrecht auf diesem Endpunkt b.

8) Soll auf den Mittelpunkt der Linie a b (Fig. 8) eine Senkrechte errichtet und also dadurch die Linie zugleich in zwei gleiche Theile getheilt werden, so setze man den Zirkel in einen Endpunkt a, öffne ihn mehr als über die Hälfte der Linie a b, beschreibe mit dieser Oeffnung oberhalb und unterhalb der Linie einen Bogen gegen den andern Endpunkt b, setze den Zirkel mit der nämlichen Oeffnung in

*) Wenn die mit Bleistift gezeichneten Figuren mit einer mit Tusch ꝛc. angefüllten Reißfeder ausgezogen werden, so werden alle Bögen und Linien, welche nur dazu dienen, um die verlangten zu erhalten, Hilfslinien genannt, nicht ausgezogen, sondern nur punktirt.

den andern Endpunkt a und durchschneide diese Bögen; durch die erhaltenen Durchschnittspunkte c und d ziehe man eine Linie e c, so steht diese senkrecht auf a b und theilt diese in dem Punkte e in zwei gleiche Theile.

9) Soll man von einem Punkte, z. B. c, außerhalb der Linie a b (Fig. 9) eine Senkrechte auf diese fällen (herabfallen lassen), so setze man den Zirkel in diesen Punkt c, öffne ihn so weit, daß man die Linie a b auf zwei Seiten damit durchschneiden kann; hierauf setze man ihn in einen dieser Durchschnittspunkte d, beschreibe unterhalb der Linie einen Bogen, dann setze man ihn mit gleicher Oeffnung in den andern Punkt e und durchschneide diesen Bogen; nun ziehe man durch den Punkt e und den Durchschnittspunkt f eine Linie c g, so ist die Aufgabe gelöst.

10) Sollte eine Linie, b a (Fig. 10), sehr lang sein, und will man sie in zwei gleiche Theile theilen, so setze man den Zirkel in den einen Endpunkt a, öffne ihn beliebig und schneide gegen b hin ein Stück a c von der Linie a b ab; hierauf setze man den Zirkel mit gleicher Oeffnung in b und schneide also ein gleiches Stück gegen c hin ab, b d; nun theile man den Rest, d. i. die Linie c d, in zwei gleiche Theile (nach r 2, Fig. 8), so ist die ganze Linie a b in dem Punkte e in zwei gleiche Theile getheilt.

f) Wenn sich eine Linie gegen eine Seite hin mehr neigt, als gegen die andere, so heißt sie eine schiefe Linie. (Fig. 11, c d.)

a) Wenn zwei Linien so gezogen sind, daß sie in allen ihren Theilen gleichweit von einander entfernt sind, und, wenn man sie unendlich fort verlängern würde, sie daher dennoch ihren gleichen Abstand beibehalten würden, so heißen sie Parallellinien (Fig. 12, a, b, c, d).

11) Eine Linie mit einer andern parallel zu ziehen. Will man eine Linie c d mit einer andern a b durch einen beliebigen Punkt e parallel ziehen, so fälle man von diesem Punkt e eine Senkrechte (nach r, 3. Fig. 9) auf a b, nehme die Länge von dieser Senkrechten e l in den Zirkel, setze ihn in einen beliebigen Punkt f in der Linie a b, beschreibe einen Bogen g h, und ziehe durch den Punkt c und den äußersten Punkt dieses Bogens eine Linie c d, so läuft sie parallel mit a b. (Statt des Bogens kann

man noch eine Senkrechte auf einen beliebigen Punkt, k f, errichten [Fig. 13], welche mit der e l gleiche Länge haben muß, f k, und durch die obersten Punkte e k die Linie c d ziehen.)

§ 3.

a) Wenn zwei Linien a c, c b (Fig. 14), welche nicht in gerader Richtung liegen, genugsam verlängert, sich irgend in einem Punkte c berühren, so entsteht ein Winkel. Ein Winkel ist also die Berührung zweier Linien in einem Punkte. b) Der Punkt c, in welchem sie zusammentreffen, heißt der **Scheitelpunkt** oder die **Spitze**, und die beiden Linien heißen die **Schenkel**. Die Größe eines Winkels hängt aber nicht von der Länge seiner Schenkel ab, sondern von der Größe des Raumes, den sie einschließen; so ist z. B. der Winkel a c b (Fig. 14) größer, als der Winkel b a d (Fig. 15).

Anmerkung. Um einen Winkel zu bezeichnen, gebraucht man einen kleinen Winkel (∠); und um ihn durch Buchstaben zu bezeichnen, gebraucht man entweder 3 Buchstaben, wobei man den an der Spitze in die Mitte setzt und auch Gleiches bei dem Aussprechen beobachtet; z. B. ∠ a e b wird gelesen der Winkel a e b; Fig. 14 wird bezeichnet ∠ a c b und Fig. 15 ∠ b a d und eben auch so gelesen; oder man gebraucht nur einen einzigen Buchstaben, welchen man in den Winkel hineinsetzt; z. B. Fig. 16 wird gelesen der Winkel x.

c) Steht ein Schenkel auf dem andern senkrecht, so heißt der Winkel, den sie bilden, ein rechter Winkel (Fig. 16). Grundsatz: Alle rechte Winkel sind sich gleich. (So ist z. B. in einem Zimmer, in welchem zwei Wände zusammenstoßen und der ∠ den sie bilden, ein rechter ist, dieser nicht größer, als der gezeichnete ∠ x in Fig. 16.) d) Ein ∠, welcher größer ist als ein rechter, heißt ein **stumpfer** Winkel (Fig. 17, n); e) und ein ∠, welcher kleiner als ein rechter ist, heißt ein **spitzer** Winkel (Fig. 18, o). f) Wenn die Schenkel eines Winkels durch die Spitze verlängert werden, so heißen die Winkel, welche sich einander gegenüber stehen, **Scheitel** oder Vertical-Winkel. (In Fig. 19 sind also ∠ ∠ n und o Vertical- und auch ∠ ∠ p und x Vertical-Winkel.) g) Wenn mehrere Winkel eine gemeinschaftliche Spitze haben, so heißen sie **Nebenwinkel**. (Alle Winkel in Fig. 20 laufen von der Spitze c aus. ∠ a c d, ∠ d e e, ∠

e c f ꝛc.) Iſt einer von zwei Nebenwinkeln ein rechter, Fig. 21, a c d (Fig. 20, a c e), und beſtehen außer ihrem gemeinſchaftlichen Schenkel a c, ihre beiden andern, b c, und c d aus einer einzigen geraden Linie, d b, ſo iſt auch der andere Nebenwinkel, d c a (nach c), ein rechter.

h) Alle Nebenwinkel zuſammengenommen, ſind dem gleich, in welchen ſie gezeichnet ſind, (denn [Fig. 20] der < a c d, + d c e, + < e c f, kann nicht mehr Raum einnehmen, als < a c f).

i) Wenn eine gerade Linie, c e, (Fig. 22) auf eine wagrechte, a b, aufgeſtellt iſt und zwei Winkel bildet, was für welche es auch ſein mögen, < a c e und < b c e, ſo ſind dieſe zwei rechten Winkel gleich, d. i. < a c e + c b e = < a c d + < b c d. (Denken wir uns die beiden rechten Winkel < a c d und < b c d und die ſenkrechte Linie e d habe ſich mit dem Endpunkte d bis nach e bewegt, ſo iſt der < a c d um den < d c e größer geworden [alſo um ſo viel ſtumpfer; vergl. § 3 d], und um ebendenſelben iſt b c d kleiner geworden [alſo um ſo viel ſpitziger, vergl. § 3 e.]) Mithin iſt < b c e + < e c d = < b c d und = einem rechten, und < a c e — < d c e = a c d und auch = einem rechten; ſo muß auch < a c e + < b c e = < a c d + < b c d ſein; d. h. kurz: eine gerade Linie, welche auf einer andern gerade ſteht und zwei Winkel bildet, welche keine rechte Winkel ſind, nehmen gerade ſo viel Raum ein, als zwei rechte.

k) Grundſatz: Alle Winkel, deren Schenkel aufeinander fallen, ſind einander gleich. (Wenn man ſie nämlich aufeinander gelegt denkt.)

1) Einen Winkel einem andern gleich zu zeichnen. Soll ein Winkel gezeichnet werden, z. B. auf die Linie g h (Fig. 24), welcher dem gegebenen < a c b (Fig. 23) gleich iſt, ſo ſetze man den Zirkel in die Spitze c des < a c b, öffne denſelben beliebig und durchſchneide mit gleicher Oeffnung die beiden Schenkel, dies gibt die Punkte d und e, ſetze den Zirkel mit der nämlichen Oeffnung in den einen Endpunkt der Linie g h, beſchreibe den Bogen i k, ſetze dann den Zirkel in e (Fig. 23) und meſſe die Weite bis nach d, ſetze dann mit dieſer Oeffnung in k (Fig. 24) ein und durchſchneide den Bogen, ziehe durch den Endpunkt g und den Durchſchnittspunkt l eine Linie g m und der < m g h = < a c b.

m) Einen Winkel a b c in zwei gleiche Theile zu theilen. Soll der < a b c (Fig. 25) in zwei gleiche Theile getheilt werden, so setze man den Zirkel in die Spitze b, des Winkels, öffne ihn beliebig, durchschneide mit gleicher Oeffnung die Schenkel, wodurch sich zwei Punkte d und e ergeben, man setze nun den Zirkel in einen dieser Punkte e, beschreibe einen Bogen f g, setze alsdann den Zirkel in den andern Punkt d, durchschneide diesen Bogen, ziehe dann durch die Spitze b und den Durchschnittspunkt h eine Linie, und diese theilt den < a b c in zwei gleiche Theile.

n) Wenn ein Winkel in einem Kreise liegt und es fällt dessen Spitze in den Mittelpunkt, so heißt ein solcher Centri-Winkel, wie der < a c b (Fig. 26); fällt aber die Spitze eines solchen Winkels in die Peripherie, so heißt er Peripherie-Winkel, wie < d h g.

o) Wenn zwei Linien a b und c d (Fig. 27) sich so durchschneiden, daß die dadurch entstandenen vier Winkel n o p x lauter rechte sind (welches geschieht, wenn die auf einer Linie gezogene Senkrechte nach unten [nach d] gerade verlängert wird, oder wenn die Schenkel eines rechten Winkels durch die Spitze verlängert werden), so sieht man (nach § 3 g), daß alle um einem gemeinschaftlichen Scheitelpunkt herumliegenden Winkel, so viel deren auch sind, vier rechten Winkeln gleich sind; und 2) (nach § 3 i), daß alle Scheitelwinkel einander gleich sind. (Wenn man sich vorstellt, daß die Linie e f, Fig. 28, zuerst die a b senkrecht durchschnitten habe, wie c d, so waren die vier Winkel n, o, p, x lauter rechte, also gleich; nun aber habe sich die e f oberhalb der Linie a b von c nach f bewegt, indem sie den Durchschnittspunkt beibehält, so muß sie sich unterhalb der Linie in gleicher Weite von d nach e bewegen. Durch diese Bewegung ist nun 1) der der Winkel (Raum) zwischen c und f gleich dem Winkel zwischen d und e; 2) gewinnt der R.-Winkel o den Winkel zwischen c und f und sein R.-Vertikalwinkel x gewinnt einen gleich großen Winkel, zwischen d und e; mithin ist der Winkel o = dem Winkel x; denn Grundsatz: Gleiches zu Gleichem addirt gibt gleiche Summen (Aggregate); 3) hat der R.-Winkel p den Winkel zwischen c und f verloren, und sein Scheitelwinkel n einen gleich großen, zwischen d und e, mithin ist der Winkel p = dem Winkel n; denn Grundsatz: Gleiches von Gleichem abgezogen, gibt gleiche Reste.)

p) Ziehen wir einen Kreis (Fig. 29) und in diesen zwei Durchmesser, welche sich senkrecht durchschneiden, so sehen wir, nach dem bisher Gelehrten, daß ein Kreis nicht mehr als vier rechte Centri-Winkel haben kann, und alle Centri-Winkel, so viel auch deren in einen Kreis gezogen werden können, vier rechten gleich sind. Und da die Größe

der Winkel sich nicht durch die Länge ihrer Schenkel bestimmt, so gilt dieses von allen Kreisen, sie mögen so groß oder so klein sein, als sie wollen (vergl. Fig. 30). Daher ist auch das Maaß eines Winkels der Bogen c d (Fig. 31), welchen man von der Spitze h des Winkels mit beliebiger Zirkelöffnung zwischen den beiden Schenkeln ziehen kann. q) Zur Ausmessung der Bögen und Winkel bestimmte man den Kreis, welchen man, er mag so groß oder so klein sein als er wolle, in 360 gleiche Theile getheilt hat, die man Grade nennt*). Ein halber Kreis hat also 180 und ein viertels Kreis 90 Grade.

Also hat auch (nach o ꝛc.) jeder rechte Winkel 90 Grade, weil sein Maaß immer der vierte Theil von der Peripherie eines Kreises ist (vergl. Fig. 29 und 30). Ein stumpfer Winkel ist demnach ein solcher, welcher mehr, ein spitziger, welcher weniger als 90 Grade hat. Und alle Centri-Winkel, welche in einem Kreis gezogen werden können, es mögen deren so viel sein, als sie wollen, haben zusammen 360 Grade. Einen Grad theilt man wieder in 60 Sekunden. Zur Bezeichnung der Grade, Minuten und Sekunden gebraucht man folgende Zeichen (°) (′) (″); z. B. 142° 5′ 2″ heißt 142 Grade 5 Minuten und 2 Sekunden. Man muß daher Acht geben, ob die Rede von einem Bogen oder Winkel oder von einer Linie ꝛc. ist (vergl. Tschb. I. Anm.).

r) Wenn zwei Linien a b, c d (Fig. 32) von einer dritten e f durchschnitten werden, so werden dadurch 8 Winkel gebildet, p q r s n o t u, von welchen die vier p r q s, welche innerhalb der durchschnittenen Linien liegen, die innern und die vier t n o u, welche außerhalb jener Linien liegen, die äußern Winkel genannt. Dann heißen diejenigen innern Winkel, welche schräg an der durchschnittenen Linie einander gegenüber liegen, wie ∠ r und ∠ q, ∠ s und ∠ p die innern Wechselwinkel, und diejenigen, welche außerhalb jener durchschnittenen Linien schräg gegen einander überliegen, wie ∠ t und o; ∠ u und n heißen die äußern Wechselwinkel.

---

*) Man hätte auch eine andere Zahl annehmen können als 360; allein diese ist durch die meisten Zahlen theilbar. So findet man in französischen mathematischen Werken den Kreis in 400 Grade eingetheilt, allwo dann der rechte Winkel 100 Grade hat. Es werden dadurch bei gleichen Kreisen nur die Grade kleiner, allein der Raum bleibt sich immer gleich.

s) Wenn zwei Linien parallel laufen und sie werden von irgend einer dritten durchschnitten (wie Fig. 32), so sind 1) die Wechselwinkel einander gleich ($< r = < q$, $< s = < p$; $< t = < o$, $< n = < u$); 2) die an einerlei Seite der Durchschnittslinie liegenden innern Winkel sind zwei rechten Winkeln gleich ($< s + < q = 2$ R.; $< r + < p = 2$ R.) und 3) die an einerlei Seite liegenden äußern Winkel sind auch zwei rechten gleich ($< n + < t = 2$ R.; $< o + < u = 2$ R.)

(Dieses kann man sich leicht beweisen, wenn man das Bisherige wohl aufgefaßt hat und sich die Linie c d auf die Linie a b geschoben denkt, wodurch man dann deutlich sieht, daß alle Winkel, welche um den Durchschnittspunkt in der Linie c d liegen, den Winkeln, welche um den Durchschnittspunkt in der Linie a b liegen, ganz gleich sein müssen.)

Eine Linie zu einer andern, c d (Fig. 33), durch einen gegebenen Punkt e parallel zu ziehen. Ziehe aus dem gegebenen Punkte e nach der Linie c d eine beliebige schiefe Linie e f, setze den Zirkel in den erhaltenen Punkt f, beschreibe mit beliebiger Oeffnung einen Bogen g h, setze in den Punkt e ein und beschreibe mit gleicher Oeffnung einen Bogen i k, messe den Bogen h g und schneide ein gleiches Stück i l von i nach k ab, durch den Punkt l und e ziehe die Linie a b, so ist sie mit c d parallel. (Vergl. § 9 Anmerk. und § 2, 11.)

§ 4.

a) Ein ganz von Linien eingeschlossener Raum heißt eine **Fläche** oder **Figur**, und die Linien, welche einen solchen Raum einschließen, heißen die **Seiten** derselben, diese zusammen genommen, heißen der **Umfang** oder **Perimeter** der Figur. b) Eine Fläche ist also, was eine Ausdehnung nach Länge und Breite hat. (Unter Fläche, ohne weiteren Zusatz, versteht man immer eine ebene Fläche, d. i. eine Ebene.) c) Eine **geradlinige** Figur ist eine solche, welche von lauter geraden Linien, und eine **krummlinige**, welche von krummen Linien, und eine vermischtlinige, welche von theils geraden, theils krummen Linien eingeschlossen wird. d) 1. Sind in einer Figur sich alle Seiten gleich, so heißt sie **gleichseitig**; 2. sind sich alle Winkel gleich, so heißt sie **gleichwinkelig**, und sind sich alle Seiten und alle Winkel

gleich, so heißt sie regulär. Im entgegengesetzten Falle heißt sie 1. ungleichseitig, 2. ungleichwinkelig und 3. irregulär.

§ 5.

Wenn eine Figur von drei Seiten eingeschlossen wird, so heißt sie ein Dreieck (Fig. 34, a b c).

(Unter Dreieck, ohne weiteren Zusatz, versteht man jedesmal ein solches, welches von drei geraden Linien eingeschlossen ist, d. i. ein geradliniges. Ein Dreieck wird an den drei Ecken mit Buchstaben bezeichnet, und für Dreieck bedient man sich des Zeichens eines kleinen Dreieckes; so heißt — △ a b c — das Dreieck a b c. Will man z. B. den obersten Winkel bei c bezeichnen in Fig. 34, so ist dieser ∠ a c b im △ a b c; jedoch gebraucht man dafür häufig nur einen Buchstaben, welchen man in den Winkel setzt.)

b) Die Linie, auf welcher das Dreieck steht, heißt die Grundlinie (Fig. 34, a b), wozu man aber jede beliebige Seite wählen kann; die beiden andern, a c und c b, heißen die Schenkel, und die der Grundlinie entgegengesetzte Spitze c heißt die Spitze des Dreiecks.

c) In Ansehung des Größe ihrer Seiten werden die Dreiecke eingetheilt: 1) in gleichseitige, das sind solche, in welchen alle drei Seiten sich einander gleich sind;

2) in gleichschenkelige, das sind solche, in welchen nur zwei Seiten sich einander gleich sind;

3) in ungleichseitige, das sind solche, in welchen keine Seite der andern gleich ist.

1) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, wozu die Seite d e (Fig. 34) gegeben ist. Man nehme die gegebene Seite d e in den Zirkel und trage sie auf eine andere Linie, auf welche man das Dreieck beschreiben will, a b, als Grundlinie, setze dann den Zirkel mit gleicher Oeffnung in einen Endpunkt a der Grundlinie, beschreibe oberhalb einen Bogen, setze den Zirkel mit gleicher Oeffnung in den andern Endpunkt b der Grundlinie, durchschneide den Bogen und ziehe von dem Durchschnittspunkt c nach jedem der Endpunkte a und b eine Linie a c und b c, so ist das erhaltene Dreieck a b c ein gleichseitiges.

2) Aus zwei gegebenen Seiten a b und c d (Fig. 35) ein Dreieck zu beschreiben. Man nehme beliebig eine von den gegebenen Seiten a b und trage sie als Grundlinie auf eine gewählte Linie e f; hierauf nehme man die andere ge-

gebene Seite c d in den Zirkel, setze ihn in einen Endpunkt e der Grundlinie, beschreibe mit dieser Oeffnung c d einen Bogen, setze dann mit gleicher Oeffnung in den andern Endpunkt f der Grundlinie, durchschneide diesen Bogen und ziehe von dem Durchschnittspunkte g, nach den Endpunkten der Grundlinie e und f Linien, so ist das erhaltene Dreieck e f g ein gleichschenkeliges.

3) Aus drei gegebenen Seiten, a b, c d, e f, (Fig. 36) ein Dreieck zu zeichnen. Man nehme beliebig eine von den gegebenen Seiten a b in den Zirkel, trage sie auf eine Linie als Grundlinie g h; hierauf nehme man eine andere von den gegebenen Seiten c d in den Cirkel, setze in einen Endpunkt g der Grundlinie ein und beschreibe einen Bogen; dann nehme man die noch übrige gegebene Linie e f in den Zirkel, setze in den andern Endpunkt h der Grundlinie ein, durchschneide den Bogen und ziehe von dem Durchschnittspunkt i nach jedem der Endpunkte der Grundlinie g h eine Linie, so ist dieses Dreieck g h i ein ungleichseitiges.

d) In Ansehung der Größe ihrer Winkel werden die Dreiecke eingetheilt: 1) in rechtwinkelige, das sind solche, in welchen sich ein rechter Winkel befindet, $<$ x in dem $\triangle$ a b c (Fig. 37); 2) in stumpfwinkelige, das sind solche, in welchen sich ein stumpfer Winkel befindet, wie $<$ n in dem $\triangle$ a b c (Fig. 38), und 3) in spitzwinklige, das sind solche, in welchen sich drei spitze Winkel befinden, in dem $\triangle$ a b c [Fig. 34 und 35]*).

e) Dreiecke und überhaupt alle Figuren sind sich gleich, wenn der Raum der einen eben so groß als der Raum der andern ist; es kann daher eine dreiseitige Figur einer fünfseitigen gleich sein, weil jene einen eben so großen Raum als diese einnehmen kann. Aehnlich sind sie sich, wenn die Winkel der einen, einzeln verglichen, den Winkeln der andern gleich sind, und wenn immer zwei Seiten der einen mit zwei ihnen gleich liegenden Seiten in der andern Figur eine Proportion ausmachen**). Es kann also ein recht-

*) Anmerk. In einem $\triangle$ können sich also befinden: drei spitze Winkel, oder ein rechter und zwei spitze, oder ein stumpfer und zwei spitze.

**) Anmerk. In dem Dreieck a b c, Fig. 38, ist a c eine gleichliegende Seite mit der Seite d f, in dem Dreieck Fig. 39 ebenso a b mit d e und b c mit e f. Der Winkel n in dem Dreieck a b c,

winkliges Dreieck nur einem rechtwinkligen, ein spitzwinkliges nur einem spitzwinkligen ähnlich sein. Congruent, d. h. gleich und ähnlich oder sich deckend, nennt man Figuren, wenn sie so aufeinander gelegt werden können, daß ihre Grenzen ringsherum aufeinander fallen. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ∾, und das der Congruenz (der Deckung) ist ≌.

f) Zwei Dreiecke sind congruent:

1) Wenn die drei Seiten des einen Dreiecks, einzeln verglichen, eben so groß sind, als die drei Seiten des andern. 2) Wenn zwei Seiten des einen Dreiecks und der Winkel, welchen diese zwei Seiten einschließen, eben so groß sind, als zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel des andern Dreiecks. (Daß die genannten Linien und Winkel immer einzeln gegenseitig verglichen werden müssen, ist hier ein- für allemal gesagt.) 3) Wenn eine Seite und die zwei an der Seite liegenden Winkel des einen Dreiecks eben so groß sind, als eine und die zwei an dieser Seite liegenden Winkel des andern Dreiecks. 4) Wenn eine Seite und zwei Winkel, von denen nur einer an der Seite liegt, des einen Dreiecks eben so groß sind, als eine Seite und zwei Winkel, von denen ebenfalls auch nur einer an dieser Seite liegt, des andern Dreiecks. 5) Wenn zwei Seiten eines Dreiecks und der Winkel, welcher der größern Seite gegenüber steht, eben so groß sind, als zwei Seiten nebst dem der größern Seite gegenüberstehenden Winkel des andern Dreiecks.

g) Wenn einer von diesen fünf Lehrsätzen bei zwei oder mehren Dreiecken wahrgenommen wird, so sind diese Dreiecke congruent; und wo daher einer stattfindet, müssen auch die andern alle stattfinden. Es sind daher die zwei Dreiecke a b c (Fig. 40) und d e f (Fig. 41) gleich:

1) Weil die Seite a b = d e; a c = b f, und b c = e f.

Fig. 38, ist gleichliegend mit dem Winkel q in dem d e f, Fig. 39, ebenso der Winkel p mit dem Winkel s und der Winkel o mit dem Winkel r. In diesen beiden Dreiecken ist aber auch der Winkel n = Winkel q; der Winkel p = gleich Winkel s und der Winkel o = Winkel r. Und ferner ist die Linie a c so oftmal in b c, als die Linie d f in e f enthalten; mithin bilden diese vier Linien eine Proportion und es ist daher das Dreieck a b c ∾ dem Dreieck d e f.

2) Weil z. B. die Seite a b = d e; a c = d f, und (der Winkel, den die gleichen Seiten einschließen) < n = < q.

3) Weil z. B. die Seite a b = d e; < n = < q, und < p = < s. (Die an den gleichen Seiten liegenden Winkel.)

4) Weil z. B. die Seite a b = d e; < n = < q (nur einer an den gleichen Seiten liegend) und < o = < r.

5) Weil z. B. die Seite a c = d f; b c = e f, und < n = < q. (Der der größern Seite gegenüberliegende Winkel.)

b) Soll nun einem Dreieck, sei es was für eines es wolle, ein anderes congruent, oder nach Einer Angabe gezeichnet werden, so müssen jedesmal drei Stücke bekannt sein oder gesucht werden, wie sie in obigen fünf Lehrsätzen (unter f ꝛc.) verlangt werden. Von diesen kommt am häufigsten vor:

1) Einem Dreieck ein anderes congruent zu zeichnen, oder irgend ein Dreieck abzutragen, zu welchem die drei Seiten gegeben sind (§ 5, f 1). Man messe eine Seite nach der andern und trage sie auf, wie unter § 5. c. 3) gelehrt wurde [vergl. Fig. 40 und 41]*).

2) Ein Dreieck zu zeichnen, zu welchem zwei Seiten, a b und c d (Fig. 42), gegeben sind, und ein Winkel, welcher zwischen diesen gegebenen Seiten liegt, < x. Man trage eine der gegebenen Linien a b (man könnte auch c d nehmen) als Grundlinie auf e f; hierauf messe man den < x und trage ihn (nach § 3. 1) auf eine Seite e oder f der Grundlinie, nehme dann die andere Linie c d in den Zirkel und trage sie auf den jetzt gefundenen Schenkel e g des Winkels x (d. h. mache den jetzt gefundenen Schenkel des Winkels x gleich c d; denn die Länge des andern Schenkels e f ist schon bestimmt durch a b); durch den Punkt g und den Endpunkt f ist dann die noch nicht bekannt gewesene dritte Seite f g des Dreiecks e f g bestimmt.

---

*) Um das Dreieck a b c, Fig. 40, abzutragen; d. h. diesem ein anderes Dreieck congruent zu zeichnen, nahm man die Grundlinie a b in den Zirkel und hat sie auf eine beliebige oder bestimmte Linie aufgetragen, d e, Fig. 41; dann den einen Schenkel a c von a c b gemessen, und auf einen Endpunkt d der neuen Grundlinie getragen d f, und hierauf den andern Schenkel b c gemessen, und auf den andern Endpunkt e der Grundlinie d e getragen.

3) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem nur eine Seite, a b, und die zwei an dieser Seite liegenden Winkel < o und < x bekannt sind (Fig. 43). Man trage die gegebene Linie a b als Grundlinie auf, c d; alsdann trage man einen von den zwei gegebenen Winkeln, < o, an eine Seite, c, der Grundlinie, den andern Winkel x an die andere Seite d, und verlängere beide Schenkel so lange, bis sie in einem Punkte, e, zusammentreffen, und man hat nun die beiden unbekannt gewesenen Seiten c e und d e gefunden.

i) Wenn man also von einem rechtwinkeligen Dreiecke die zwei Seiten weiß, welche den rechten < einschließen, so ist das ganze Dreieck bekannt (§ 3, c).

1) Ein solches rechtwinkeliges △, zu welchem die zwei den rechten < einschließenden Seiten a b und c d (Fig. 44) gegeben sind, zu zeichnen. Man nehme eine der gegebenen Linien, a b, trage sie als Grundlinie auf e f, errichte an einem Endpunkte e dieser Grundlinie eine Senkrechte (§ 2, r 7, § 3, c), trage alsdann die andere gegebene Linie c d auf diese Senkrechte, so ist die dritte Seite, f g, bestimmt.

k) Bei einem rechtwinkeligen Dreiecke heißen die zwei Seiten, welche den rechten Winkel bilden (e f und e g, welche senkrecht aufeinander stehen) die beiden Katheten und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite f g die Hypotenuse.

1) Die drei Winkel in einem jeden Dreieck sind zusammengenommen zwei rechten gleich; oder sie halten (nach § 3, q) 180 Grade.

2) In jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel, und der kleineren Seite der kleinere Winkel gegenüber (Fig. 36 h i < n ꝛc.) und gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber (Fig. 34).

3) In jedem gleichseitigen Dreieck (Fig. 34) sind die drei Winkel einander gleich; d. i. < n = < o, < o = p (§ 1, c zweiter Grundsatz), oder jeder < = 60°.

4) In jedem gleichschenkeligen Dreiecke (Fig. 35) sind die Winkel, welche an der Grundlinie liegen, einander gleich, d. i. < n = < o.

m) In jedem rechtwinkeligen Dreiecke sind also die beiden spitzen < einem rechten gleich, oder sie halten beide

90°; wenn daher einer von den spitzen Winkeln in einem solchen Dreieck bekannt ist, so ist auch der andere bekannt.

Wenn z. B. der < q im Dreieck e f g (Fig. 44) 54° hält, so muß < p = 36° sein; denn 90—54 = 36. Und ist in einem gleichschenkeligen Dreieck ein < an der Grundlinie bekannt, so ist der an der Spitze auch bekannt. Ist z. B. im Dreieck e f g (Fig. 35) der < n = 50°, so sind beide < an der Grundlinie zusammen 100°, und da alle drei zusammen 180° betragen, ist mithin der an der Spitze = 180° — 100°, d. i. 80°.

n) Um einen Winkel nach Graden zu bestimmen und aufzutragen, bedient man sich eines in 180 Grade eingetheilten Halbkreises, gewöhnlich aus Messing verfertigt, der **Transporteur** (sprich: Transportör) genannt wird [Fig. 46] *).

1) Einen gegebenen Winkel b a c (Fig. 47) zu messen. Man lege den Mittelpunkt c des Transporteurs genau auf den Scheitelpunkt a des zu messenden Winkels b a c, setze dabei die obere Kante des Transporteurs c d genau an den Schenkel a c; nun sehe man, in den wie vielsten Grad der andere Schenkel a b fällt **) (der Raum f g h ist leer); hier wird er in den 30. Grad fallen, der Winkel also = 30°.

2) Einen gegebenen < a d f, Fig. 48, abzutragen. Man lege den Mittelpunkt c des Transporteurs ebenfalls an den Scheitelpunkt d des < a d f so, daß die obere Kante a c des Transporteurs genau an den Schenkel a d anliege, und man wird nun finden, wie oben, wie groß der < ist; hier wird der andere Schenkel d f in den 140sten Grad fallen, < a d f = 140°. Nun ziehe man eine Linie g h (Fig. 49), auf welche man den < tragen will, lege den Mittelpunkt c des Transporteurs genau in den Endpunkt h eben so, daß die obere Kante a c in den Schenkel g h falle, mache auf die Stelle, wo der bekannte Grad, hier der 140ste, hinfällt, einen Punkt, i, und ziehe von diesem Punkt i nach dem Punkt h eine Linie i h, welcher man (nach § 3, b) ebenfalls jede beliebige Länge geben kann.

3) Man trage den < a d f auf die Seite g der Fig. 49.

*) Bei einem großen Transporteur ist jeder Grad wieder in mehrere Theile oder, wo es thunlich ist, in Minuten eingetheilt (§ 3, p.)

**) Wenn der Scheitelpunkt eines Winkels auf der linken Seite ist, wie Fig. 47, so wird der Winkel durch die Grade von der Rechten gegen die Linke bestimmt, welche hier durch die Zahlen außerhalb angezeigt sind, und ist dessen Scheitelpunkt auf der rechten Seite, so werden dessen Grade von der Linken gegen die Rechte bestimmt, welche hier durch die Zahlen innerhalb angezeigt sind.

§ 6.

a) Eine jede von vier Seiten eingeschlossene Figur heißt ein Viereck *).

b) Hat ein Viereck vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel, so heißt es ein Quadrat.

1) Ein Quadrat zu zeichnen, zu welchem die Seite a b (Fig. 50) gegeben ist. Man lege die gegebene Seite a b als Grundlinie an, c d, errichte aus einem Endpunkte, c, eine Senkrechte (§ 2, r 7), mache auch diese der gegebenen Linie a b gleich, c e; setze dann mit beibehaltener Zirkelöffnung (der Länge von a b) in den Punkt e ein, beschreibe einen Bogen f g, setze wieder mit der nämlichen Zirkelöffnung in d ein, und durchschneide diesen Bogen; von dem Durchschnittspunkt, h, ziehe man alsdann nach e und h Linien, e h, h d. Die Figur wird dann bezeichnet □ c d e h.

c) Sind in einem Vierecke vier rechte Winkel, aber immer nur die zwei gegenüberstehenden Seiten sich einander gleich, so heißt sie ein Rechteck, oder Oblongum, oder Recktangel.

1) Ein Rechteck zu zeichnen, zu welchem die zwei Seiten a b und c d (Fig. 51) gegeben sind. Man lege eine Seite, a b, als Grundlinie an, e f, errichte aus einem Endpunkt derselben, e, eine Senkrechte und mache diese der Linie c d gleich, e g; nehme darauf die Linie a b wieder in den Zirkel und beschreibe aus g nach h einen Bogen; nun nehme man die Länge c d wieder und durchschneide denselben; hierauf ziehe man von dem Durchschnittspunkt h Linien nach g und f.

d) Wenn in einem Viereck die vier Seiten sich einander gleich sind, sich aber kein rechter < darin befindet, so heißt es eine Raute, Rhombus, oder auch verschobenes Quadrat.

1) Eine Raute zu zeichnen, zu welcher die Seite a b gegeben ist und der < x, Figur 52. Man lege die Linie a b als Grundlinie an, c d, trage den < x (nach § 3 k, oder, wenn er in Graden gegeben ist, nach § 5, n 2) auf einen Endpunkt, c, der Grundlinie; mache den Schenkel die-

*) Zur Abkürzung bedient man sich auch des Quadratzeichens (▭.)

ses Winkels c e auch gleich a b; behalte die nämliche Zirkelöffnung bei, setze in e ein, und beschreibe einen Bogen gegen f; setze hierauf in d ein, mit abermals beibehaltener Oeffnung, und durchschneide diesen; nun ziehe man aus dem Durchschnittspunkt f nach e und d Linien, e f, f d.

e) Wenn in einem Vierecke nur immer die zwei sich gegenüberstehenden Seiten gleich sind und sich kein rechter Winkel darin befindet, so heißt es ein Rhomboides oder verschobenes Rechteck.

1) Man zeichne ein Rhomboid, zu welchem die zwei Seiten a b und c d, und < x gegeben sind (Fig. 53). Wenn man die Zeichnung von dem Rechteck (c Fig. 51) und von der Raute (d Fig. 52) aufgefaßt hat, so bedarf man dazu keine weitere Erklärung.

f) In der Raute wie im Rhomboid sind sich die Gegenwinkel gleich.

g) Die unter b c d und e beschriebenen Figuren führen den gemeinschaftlichen Namen Parallelogramme.

h) Wenn in einem Viereck nur zwei Seiten mit einander parallel laufen, heißt es ein Trapezium (Fig. 54 läuft a b parallel mit c d), und läuft gar keine Seite mit einer andern parallel, so heißt es ein Trapezoides (Fig. 55).

i) Zieht man in einer Figur eine Linie von einer Winkelspitze zu der andern gegenüberstehenden, so heißt dieses eine Diagonallinie, wie die Linie b d (Fig. 56). Die Diagonallinie theilt jedes Viereck in zwei Theile (Dreiecke), und jedes Parallelogramm in zwei gleiche Theile (zwei congruente Dreiecke).

k) Zwei Parallelogramme sind sich am Raume gleich, wenn beide gleiche Grundlinien haben und zwischen einerlei Parallellinien liegen, oder wenn beide gleiche Höhen haben. So ist das Rechteck a b c d (Fig. 57) = dem Rhomboid a b e f. (Die Linie e f ist mit a b parallel.)

l) Eben so sind sich auch zwei Dreiecke am Raume gleich, wenn beide gleiche Grundlinien und zwischen einerlei Parallelen liegen, oder wenn beide gleiche Höhen haben. So ist das Dreieck a b c (Fig. 58) = Dreieck a b d (c d parallel mit a b).

m) Die Höhe von einem Parallelogramm wird gefunden, wenn man aus irgend einem Punkte aus der, der

Grundlinie gegenüberstehenden, Seite eine Senkrechte auf die Grundlinie fällt (§ 2, r, 9). Die Linie e f (Fig. 59) ist also die Höhe des Rhomboids a b c d. Und die Höhe eines Dreiecks wird gefunden, wenn man von der Spitze auf die Grundlinie eine Senkrechte fällt. Vom Dreieck a b c (Fig. 60) ist c d die Höhe. Oft trifft es sich, daß diese Senkrechte außerhalb der Figur fällt, in welchem Falle man die Grundlinie verlängern muß. Im Dreieck a b c (Fig. 61), ist c e die Höhe (vergleiche Tschbch. S. 7, IV u. S. 8, VI ꝛc.)

§ 7.

a) Hat eine Figur mehr als vier Seiten, so heißt sie ein Vieleck oder Polygon; und nach der Anzahl der Seiten ein Fünfeck oder Sechseck ꝛc. und die Winkel am Umfange heißen Polygonwinkel (Fig. 62 $<$ c d f $<$ d c e d c e $<$ c e g $<$ e g f und g f d sind die 5 Polygon-Winkel).

b) Hat ein Vieleck gleiche Seiten und gleiche Winkel, so heißt es ein reguläres (Fig. 62), im entgegengesetzten Falle aber ein irreguläres Vieleck *).

c) Der Mittelpunkt eines Vielecks wird gefunden, wenn man irgend zwei neben einander liegende Seiten desselben (nach § 2, r 8) in zwei gleiche Theile theilt und die Theilungs-Linien so lange verlängert, bis sie sich schneiden, welcher Durchschnittspunkt dann der Mittelpunkt ist. (In Figur 62 sind die Seiten e g und f g getheilt und dadurch der Punkt i entstanden).

d) Jedes Polygon kann man sich in so viel gleiche Dreiecke getheilt denken, welche alle den Mittelpunkt zur Spitze haben (Fig. 62), als das Vieleck Seiten hat, vergl. Tschbch S. 11, VII. Dadurch weiß man nun, wie viel Grade alle Winkel im Polygon halten, und wie viel Grade ein Polygonwinkel hält. Jedes Dreieck hält (nach § 5, k 1) 180°, mithin halten sämmtliche Winkel aller Dreiecke so viel Grade, als das Polygon Seiten hat, multiplicirt mit 180. Zieht man nun die Mittelpunktswinkel von diesem Produkte ab, und dividirt den Rest durch die Anzahl der Seiten, so hat man den Polygonwinkel.

*) Wir verstehen ohne weiteren Zusatz immer ein reguläres darunter.

1) Ein Fünfeck zu zeichnen, zu welchem eine Linie a b gegeben ist. Man trage die Linie a b (Fig. 63 A) als Grundlinie auf c d, suche dann den Polygonwinkel (d. i. $180^0 \times 5$ [mit den Seiten des Vielecks] $= 900^0 - 360^0$ [den Centri-Winkeln] $= 540^0 : 5$ [den Seiten des Vielecks] $= 108^0$) und setze ihn (mit dem Transporteur) an c und d, mache die Seiten c e und d f gleich c d, setze hierauf den Polygon-Winkel wieder an e und f und verlängere die beiden Schenkel, bis sie sich schneiden.

Auf diese Art kann man alle möglichen Vielecke zeichnen.

Ein gedrücktes gleichseitiges Fünfeck auf eine gegebene Linie a b (Fig. 63, B) zu construiren.

Man theile die gegebene Linie a b in 2 gleiche Theile (c) und verlängere sie um die Hälfte (d); beschreibe dann mit der Linie a d von a aus den Bogen e f, setze mit gleicher Oeffnung den Zirkel in b und durchschneide ihn, so erhält man den Punkt g. Alsdann beschreibe man mit a b aus a den Bogen h i setze den Zirkel in g und durchschneide ihn mit gleicher Oeffnung, so erhält man den Punkt m; gleiches Verfahren wird nun ebenfalls bei b und g gemacht, wodurch man den Punkt n erhält. Nun verbindet man die Durchschnittspunkte durch Linien, wodurch das verlangte Fünfeck a b n g m construirt ist.

§ 8.

a) Eine geradlinige Figur ist in einen Kreis beschrieben, wenn jede Winkelspitze derselben die Peripherie des Kreises berührt. (Siehe S. 4 Anmerk.)

1) Ein gleichseitiges Dreieck d e b (Fig. 64) in einen Kreis zu beschreiben. Man ziehe einen Durchmesser, a b (§ 2, 1), setze den Zirkel in den Punkt a, öffne ihn bis an den Mittelpunkt c, beschreibe mit dieser Oeffnung von a aus einen Bogen, d e, und verbinde die Punkte b, d und b, e durch Linien.

2) Ein Quadrat in einen Kreis zu zeichnen (Fig. 65). Man ziehe einen Durchmesser, a b, auf diesen einen andern senkrecht d e, und verbinde die Endpunkte derselben durch Linien.

3) Ein Sechseck in einen Kreis zu beschreiben (Fig. 66). Man nehme den Halbmesser des Kreises a c, welcher

sich genau sechsmal auf die Peripherie tragen läßt, und verbinde die Punkte a b d e f g durch Linien.

b) Vielecke werden am leichtesten in einen Kreis gezeichnet, wenn man den Mittelpunktswinkel des Vielecks an den Mittelpunkt des Kreises anlegt, und dessen Schenkel bis an die Peripherie zieht, so ist dessen Sehne (§ 2, n o) ein Theil des verlangten Vielecks, welchen man dann auf die Peripherie aufträgt, und die Punkte durch Linien verbindet.

1) Ein Quadrat in einen Kreis zu verwandeln. Um ein gegebenes Quadrat (Fig. 68) in einen Kreis zu verwandeln, welcher eben so viel Flächeninhalt hat, als der gegebene Kreis, ziehe man eine Diagonale, a d, theile diese in zehn gleiche Theile, oder die Hälfte in fünf, nehme vier von diesen, als Halbmesser, und ziehe einen Kreis, so ist dieser dem gegebenen □ gleich.

2) Ein Fünfeck in einen Kreis zu beschreiben (Fig. 67, a). Man ziehe beliebig einen Halbmesser a c, lege den Centriwinkel des verlangten Vielecks daran (diesen bekommt man (§ 7 d), wenn man 360° durch die Anzahl der Seiten dividirt, also hier $360^0 : 5 = 72^0$) ziehe die Schenkel so lang, bis sie die Peripherie berühren, und ziehe die Sehne a d, welche sich dann genau fünfmal in den Kreis auftragen läßt.

3) Ein Fünfeck kann auch ohne Hilfe des Transporteurs auf folgende Art in einen Kreis beschrieben werden. Es ist z. B. der Durchmesser a b (Fig. 67, b) gegeben, so beschreibe man einen Kreis und errichte auf dessen Mittelpunkt c eine Senkrechte (c d); theile c b in zwei gleiche Theile (e), setze den Zirkel in den Punkt e ein, öffne ihn bis in den Punkt d und beschreibe mit dieser Oeffnung den Bogen d f, so ist dessen Sehne, f d, die Länge der Linie, welche sich genau fünfmal in den Kreis hineintragen läßt.

Um mit, oder auf eine gegebene Linie ein 5, 6, 7, 8, ꝛc. =Eck zu beschreiben. Man errichte auf den Mittelpunkt der gegebenen Linie a b (Fig. 69) eine Senkrechte, c d, beschreibe mit a b, aus b, einen Bogen bis an die Senkrechte, a f, theile diesen Bogen in 6 gleiche Theile; ziehe mit der Weite 6, 5 A den Bogen 5 A, 7 (durch 5), dann mit der Weite 6, 4 den Bogen 4, 8, hierauf den Bogen 6, 3, 9 und so fort. Es ist dann die Länge der Linie a, 5 A der Halbmesser zu dem Kreise, in welchem sich die Linie a b genau 5mal herumtragen läßt, a 6 (oder a b), der Halb-

messer zu dem Kreise, in welchem sich a b sechsmal herumtragen läßt, oder zu einem Sechseck, a 7 zu einem Siebeneck 2c.

§ 9.

a) Eine Linie, welche außerhalb des Kreises gezogen ist, die aber den Kreis nur in einem Punkte berührt und also denselben nicht schneiden kann, a b d, (Fig. 70 a) daher auf dem von dem Berührungspunkt b gezogenen Halbmesser, b c, oder Durchmesser, immer senkrecht stehen muß, heißt eine Tangente.

1) Eine Tangente zu ziehen. Man ziehe von dem Punkte, in welchem der Kreis berührt werden soll, einen Halbmesser und setze an den Berührungspunkt eine Senkrechte (Fig. 70.)

Anmerk. Um sich das Zeichnen zu erleichtern, nimmt man zwei von Holz 2c. verfertigte rechtwinkelige Dreiecke, mit welchen man ganz leicht und geschwind senkrechte und Parallelinien beliebig ziehen kann. 1) Will man mittelst solcher Dreiecke, z. B. auf den Endpunkt a der Linie a b (Fig. 71), eine Senkrechte errichten, so lege man eine Seite des einen Dreiecks (Dreieck e) genau an die Linie a b und setze eine Kathete des andern Dreiecks (Dreieck f) so auf die angelegte Seite fest, daß die Spitze des rechten Winkels dieses Dreiecks auf den Punkt a, wohin die Senkrechte gezogen werden soll, komme, und ziehe längs der Kathete die Linie a f Das Nämliche kann man auch vollenden, wenn man ein Lineal an die gegebene Linie legt und das rechtwinkelige Dreieck, wie oben gelehrt, darauf setzt. 2) Will man auf diese Art Parallellinien ziehen; z. B. zu der Linie a b in dem Dreieck a b c (Fig. 72) soll durch den Punkt d eine Parallele gezogen werden, so lege man die Hypotenusen zweier Dreiecke, e und f, genau auf einander, welche dann ein Parallelogramm bilden, lege eine Seite dieses Parallelogramms genau an die Linie a b, halte das andere Dreieck e fest, rücke dann das an der Linie a b liegende Dreieck, f, dicht an der Hypotenuse so lange fort, bis es mit der Kathete den Punkt d erreicht hat, und ziehe an dieser die Linie d e (Fig. 73), so ist sie parallel mit a b. Man versuche die Hypotenuse eines Dreiecks an ein Lineal zu legen und obige Aufgabe zu lösen. Noch leichter kann man, wenn das Papier auf ein richtig gemachtes Reißbrett gespannt ist, mit einer richtig gemachten Reißschiene obgenannte Linien ziehen; denn alle Linien, welche längs des Reißbrettes mit der Schiene gezogen werden, welche aber mit ihrem Einschnitt fest an die Kante des Reißbretts angelegt werden muß, laufen parallel; und ebenso auch die, welche quer gezogen werden; daher stehen auch diese auf jenen, und jene auf diesen immer senkrecht (§ 2 u. Fig. 13 2c.)

§ 10.

a) Eine geradlinige Figur ist um einen Kreis beschrieben, wenn jede Seite der Figur die Peripherie des Kreises berührt (also jede Seite eine Tangente ist; Fig. 70).

b) Will man eine Figur um einen Kreis beschreiben, so beschreibe man dieselbe zuerst, wie sie unter § 8 gelehrt wurde, in den Kreis und ziehe dann durch die Winkelspitzen dieser Figur Tangenten, welche man so lange verlängert, bis eine die andere berührt.

1) Ein Sechseck um einen Kreis zu beschreiben (Fig. 74). Man beschreibe in den gewählten Kreis (nach § 8, a 3 ein Sechseck, a b c d e f, ziehe von dessen Winkelspitzen Halbmesser, und auf diese senkrechte Linien (Tangenten), so entsteht durch deren Winkel, welche sie verlängert bilden, das Sechseck A B C D E F.

Auf diese Art können nun alle regulären Figuren um einen Kreis beschrieben werden.

§ 11.

a) Wenn in einem Kreis irgend eine Sehne durch eine senkrechte Linie in zwei gleiche Theile getheilt wird (§ 2, r 8), so geht diese Theilungslinie durch den Mittelpunkt des Kreises (Fig. 75).

1) Zu einem Kreis (Fig. 76) den Mittelpunkt zu finden. Man wähle in der Peripherie drei beliebige Punkte, a b c, verbinde sie durch Sehnen, a b, b c, theile jede Sehne in zwei gleiche Theile, so ist der Punkt, d, in welchem sich die Theilungslinien schneiden, der Mittelpunkt des Kreises (vergl. § 7, c).

2) Zu einem gegebenen Bogen den Mittelpunkt zu finden (Fig. 77, a b). Man wähle zu den zwei Endpunkten noch einen Punkt, a b c, verbinde diese durch Sehnen und verfahre wie oben, so ist der gefundene Punkt d der Mittelpunkt des Kreises, in welchem der Bogen, a b, liegt.

3) Man suche den Mittelpunkt zu einem Kreis, dessen Peripherie durch drei, nicht in gerader Linie liegende, gewählte Punkte gehen muß (Fig. 78). (Vergl. 1, 2 oben.)

b) Gleiche Bogen haben gleiche Sehnen.

c) Eine aus dem Mittelpunkt eines Kreises gezogene Linie, c d (Fig. 79), welche eine Sehne, e g, in zwei gleiche Theile theilt, theilt auch den zur Sehne gehörigen

Bogen, e f g, wenn sie bis zur Peripherie verlängert wird, in zwei gleiche Theile, e f, f g.

Durch diesen Satz wird man leicht einsehen, wie z. B. ein Sechseck in ein Zwölfeck; ein Fünfeck in ein Zehneck ꝛc. verwandelt werden kann.

§ 12.

a) Eine gerade Linie, a b (Fig. 80), in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen; z. B. in fünf. Man ziehe aus einem Endpunkte, b, unter die gegebene Linie, a b, eine schiefe Linie von beliebiger Länge, b c, so daß beide einen spitzen < bilden, trage auf diese Linie von dem Punkt b nach c hin fünf beliebige gleiche Theile mit dem Zirkel auf, ziehe dann den letzten Theilungspunkt, 5, und den Anfangspunkt, a, der zu theilenden Linie zusammen; zu dieser erhaltenen Linie ziehe dann mit zwei rechtwinkligen Dreiecken durch alle Theilungspunkte (1, 2, 3, 4, 5) Parallelen, (nach § 9, a, 1, Anmerkung), so ist a b in eben so viel gleiche Theile getheilt, als auf c b aufgetragen sind. Dieses thut man der Kürze wegen und um die zu theilende Linie rein zu erhalten.

§ 13.

Soll eine krumme Linie abgetragen werden, z. B. a b (Fig. 81); so ziehe man, wie die Figur zeigt, an diese krumme Linie eine gerade, c b, fälle dann von der krummen Linie so viel Senkrechte auf die gerade (§ 9, Anmerkung), daß die zwischen den Senkrechten liegenden Theile der krummen Linie, so viel wie möglich, als gerade erscheinen. Hierauf ziehe man eine gerade Linie, e f, errichte auf jene Punkte, auf welchen sich in c b Senkrechte befinden, auch in e f Senkrechte (d. sind 1, 3, 4, 6, 7), mache diese Senkrechten jenen gleich, d. i. 1 in c b = 1 in e f; 3 in c b = 3 in e f ꝛc.), und ziehe alsdann durch die Bestimmungspunkte aus freier Hand die Linie g f, so wird sie der Linie a b bereits congruent genannt werden können. *)

*) Wenn man irreguläre Figuren, wie auch Rauten und Polygone, oder ganz große Zeichnungen, wie Landkarten ꝛc., abzeichnen will, so thut man am besten, wenn man die abzuzeichnende Figur in lauter Dreiecke theilt, und eines nach dem andern abträgt (vergl. Fig. 82).

§ 14.

a) Das Maß einer Linie ist durch eine Linie bestimmt (vergl. Taschenbuch S. 1 ꝛc. und das diesem Buche beigegebene Metermaß); das Maß einer Fläche wieder durch eine Fläche, und man bedient sich hierzu des Quadrates. Der Inhalt einer Fläche wird demnach immer durch den Quadratinhalt bestimmt.

b) Ist eine Fläche einen Fuß oder einen Meter ꝛc. hoch und breit, so heißt sie ein Quadrat-Fuß oder Quadrat-Meter ꝛc. (auch sagt man ein Fuß oder Meter ꝛc. in's Geviert). Wäre z. B. im □ (Fig. 50) die Linie c d = 1 Fuß so wäre dieses ein Quadratfuß; wäre sie einen Meter lang, so wäre es ein Quadratmeter; wäre sie einen Centimeter lang, ein □Centimeter; ein Zoll, ein □Zoll ꝛc.

Berechnung siehe Taschenbuch S. 3.

1) Zur Ueberzeugung diene die Figur 83, hier ist eine Seite zu 3′ angenommen.

2) In Figur 51 ist h f = 11′ und h g = 9′ (siehe Tschbch. S. 5 oben)

3) In Figur 59 ist c f die Höhe (§ 6 m) (vergleiche Tschbch. S. 7 IV).

4) In Figur 54 (Trapezium) ist a b = 5⁰′ 4″ die Höhe e f = 12′, c d = 40′ 8″ (siehe Tschbch. S. 7 V).

5) In Fig. 60 ist d c die Höhe und a e die Grundlinie (vergl. Tschbch. S. 8 VI und 18).

6) In Fig. 61 ist a b die Grundlinie und e c die Höhe (vergl. Tschbch. S. 8 Anmerk. unten).

7) Den Flächeninhalt eines Trapezoides (Fig. 84) zu finden (siehe § 13 Anmerkung und Tschbch. S. 12, IX).

8) Wie oben verhält es sich mit Fig. 82.

6) Die Grundfläche eines sechseckigen Steines (Fig. 85) a b = 6′, d c = 7′ = 3 × 7 = 21 □′ × 6 = 126 □′ (siehe oben u. Tschbch. S. 9, a).

§ 15.

Von dem Kreise.

(Siehe Tschb. S. 12, X.)

1) Der Durchmesser des Kreises (Fig. 29, a b) habe 3′? (siehe Taschenbuch S. 13, 28).

2) Der Durchmesser des Kreises (Fig. 30, a b) habe 3 Meter? (siehe Tschbch. S. 23, 29).

3) Der Kreisrand (siehe Tschbch. S. 15, XIII und Anmerkung unten). In Fig. 86 sei der Durchmesser a b, 8′, a c (der Kreisrand) 2′; demnach der Durchmesser a b 12′? (wie oben XIII, 37 und 38).

4) In Fig. 87 ist b c = 5′, d a = 2′; a e = 10′, d f = 14′; g h = 12′. Der Flächeninhalt von d a e f = ? (siehe Tschbch. 16, XIV, 39 u. 40).

5) Jeder Kreis läßt sich als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten und also auch als so viel Dreiecke, von welchen sämmtlich der Halbmesser die Höhe ist (§ 7 d); mithin läßt sich auch jeder Kreis als ein Dreieck betrachten, zu welchem der Umfang die Grundlinie und der Halbmesser die Höhe ist.

6) In Fig. 88, a, ist der Durchmesser a b = 9′, mithin der Umfang 314 × 9 = 28,26 = 28′ 2″ 6‴ (vergl. Tschbch S. 12, XI u. XII); der Halbmesser 4′ 5″ ($4^1/_2$); also gibt 28′ 2″ 6‴ die Grundlinie zu dem △ Fig. 88 b und 4′ 5″ die Höhe; also 28,26 × 4,5 = 127,170 : 2 = 63,58,50 = 63 □′ 5 □″ 50 □‴; Der Flächeninhalt des Dreiecks, so wie des Kreises (vergl. Tschbch. S. 17 XV, 41, und Anmerkung).

7) Die Fläche, welche von zwei Halbmessern (Fig. 89, a c, b c) und deren Bogen a b eingeschlossen ist, a c b, heißt ein Kreisausschnitt oder Sektor. Um den Flächeninhalt eines Sektors zu berechnen, muß man den Flächeninhalt des ganzen Kreises und die Anzahl der Grade des Winkels am Mittelpunkt wissen. Alsdann fragt man: Wie viel Quadratinhalt gibt der Winkel (am Mittelpunkt, Centriwinkel) von so viel Graden, wenn 360 (alle Centriwinkel des Kreises), so viel Quadratinhalt

geben. Wenn z. B. in dem Kreise (Fig. 89) der Durchmesser e b = 20′ ist. so ist der Quadratinhalt desselben 20 × 20 × 785 = 314000 = 314 □′ (Tschbch. S. 17 XV); der Winkel am Mittelpunkt sei 40 Grad (mit dem Transporteur gemessen), so ist die Frage: Wie viel Quadratfuß geben 40⁰, wenn 360⁰, 314 Quadratfuß geben: d. i. 360⁰ : 40 = 324 □′ : x □′ (360⁰ verhalten sich zu 40⁰ wie 314□′ zu x □′); oder kurz: die Grade des Centri-Winkels des Sektors werden mit der ganzen Kreisfläche multiplicirt und mit 360 dividirt, d. i. 40 × 314 = 12560 : 360 = 34,8888 ... □′ = 34 □′ 88 □″ 88‴ der □Inhalt des Sektors.*)

8) Ein anderer Durchmesser eines Kreises hat 10′, der Centriwinkel des Sektors 30⁰; so ist dessen Quadratinhalt: 10 × 10 × 785 = 78|500 = 78′ 50″; also 78,50 × 30 = 2355|00 : 360 = 6 □′, 54 □″, 16 □‴, 66 □⁗.

Im vorletzten Beispiel sieht man leicht ein, daß 40⁰ der neunte Theil von 360⁰ ist; so findet man auch leicht den Flächeninhalt des Sektors, wenn man die ganze Kreisfläche durch 9 dividirt d. i. 314 : 9 = 34,8888 ..... = 34 □′ 88″ 88‴ 88⁗...

Im letzten Beispiel: 30⁰ ist der 12 Theil von 360; mithin 78,50 : 12 = 6, 5416 ... = 6 □′ 54″, 16‴ 66⁗ ....

Dieses Verfahren läßt sich aber nur dann anwenden, wo die Grade des Centriwinkels in 360 ohne Rest durch die Division aufgehen.

9) Die Fläche, welche eine Sehne und ihr Bogen einschließen, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment (Fig. 90, b d e). Um den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu berechnen, muß man den ganzen Ausschnitt (b c d), wie oben (unter 7, 8) gelehrt, berechnen. Hierauf berechne man das in dem Ausschnitte, durch die zwei Halbmesser und die Sehne gebildete Dreieck und ziehe es von dem Flächeninhalt des Ausschnittes ab, so ist der Rest der Quadratinhalt des Segmentes. Z. B. der Centriwinkel b

*) Die Berechnungen sind schon im Taschenbuch genugsam erklärt; übrigens siehe „Lehre von der Dezimalbruchrechnung" von M. Nast.

c d = 36° und der Durchmesser a b = 20′, so ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises 314 □′ (siehe unter 7,) und 314 × 36° = 11304 : 360 = 31,4 = 31 □′ 40″ der Flächeninhalt des Sektors (oder 314 : 10 = 31,4 = 31 □′ 40 □″, weil 36° der 10te Theil von 360° ist (siehe unter 8). Nun ist in dem Dreieck b d c b d = 6′ und e c = 8′ 5″; mithin 6 × 8,5 = 51,0 : 2 = 25 □′ 50 □″

□Inhalt des Sektors = 31 □′ 40″
— □Inhalt des Dreiecks = 25 □′ 50″

Also der □Inhalt des Kreisabschnittes = 5 □′ 90″

10) In Figur 90 ist der Durchmesser a b im Naturmaß 40 Millimeter; der Centriwinkel d c b = 36°; die Sehne b d 13 Millimet., e c 18 Millimeter; mithin ist der Quadratinhalt des Segmentes: 40 × 40 = 1600 × 785 = 1256|000 = 1256 Quadratmill. (= 12 Quadrat-Decimeter 56 Quadratmillim. [vergl. Tschbch. S. 18, 43 u. S. 19, 47]). × 36 = 45216 : 360 = 125,6 Quadratmillim. (125 6/10 Quadratmillim.) = Quadratinhalt des Sektors. Oder 1256 : 10 = 125,6 Quadratmillimeter (vergl. 8.) △ b c d = 13 × 9 = 117 Quadratmillimeter (vergl. Tschbch. S. 17 a); 125,6 — 117 — 8,6 Quadratmillimet.; also ist der Quadratinhalt des Segmentes 8,6 Quadratmillimeter.

11) Man kann jede Fläche in ein Quadrat verwandeln, wenn man deren Quadratinhalt, wie bisher gelehrt wurde, sucht und aus diesem die Quadratwurzel zieht, welches dann die Seite des Quadrates gibt. Man hat z. B. gefunden, daß eine sechseckige Figur 2601 □′ enthält, und man wollte ein □ von gleichem Flächeninhalt daraus bilden, so ist die Berechnung $\sqrt{2601}$ □′ = 51′ = der Länge der Seite zu dem verlangten Quadrat (vergl. Anhang „Lehre von der Dezimalbruchrechnung und Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel").

12) Will man ein gegebenes □ noch einmal so groß machen, so multiplicire man den Flächeninhalt mit 2, will man es 3mal so groß machen, mit 3 u. s. w. und ziehe aus dem Quadratinhalt die Quadratwurzel, welche dann die Länge der einen Seite ist; z. B. ein □ von 16 □′ Inhalt (dessen eine Seite natürlich 4′ lang ist) soll noch dreimal so groß gemacht werden; s. i. d. 16 □′ × 3 =

48; $\sqrt{48} = 6{,}928 - \ldots\ldots = 6'\ 9''\ 2'''\ 8''''$; die Seite zum □ von 4 8 □'. $6{,}928 \times 6{,}928 = 47$ □', 99 □'', 71'''' 84. Also würde das □ um etwas Unbemerkbares kleiner. Setzen wir für die weggelassenen Stellen in der Quadratzahl statt 8'''' 9''''; so ist dieses $6{,}929 \times 6{,}929 = 48', 01'', 10''', 4''''$, also nicht um $^1/_{11000}$ □' mehr (siehe 11, unten).

13) Aber ganz genau kann man ein jedes gegebene □ noch einmal so groß zeichnen durch Anwendung des von Pythagoras gefundenen Lehrsatzes, welcher also heißt: Das □ der Hypotenuse (eines rechtwinkeligen Dreieckes) ist so groß, als das □ der beiden Katheten zusammengenommen (Fig. 91).

Machen wir ein rechtwinkeliges Dreieck (Fig. 91 a b c), dessen eine Kathete 3' und dessen andere 4' lang ist, so ist dessen Hypotenuse 5' lang. Machen wir nun mit a b ein □ a b d e, so ist dessen Quadratinhalt 9 □' und eines mit a c, a h i c, so ist dieses = 16 □' und eines mit c b, c b f g, so ist dessen Inhalt = 25 □'; mithin ist □ a b d e + □ a h i c = □ c b f g (Fig. 92 dient zu dem mathematischen Beweise, welcher später folgt).

14) Soll nun ein Quadrat genau noch einmal so groß als ein gegebenes Quadrat (a b c d, Fig. 93) gezeichnet werden, so ziehe man in das gegebene die Diagonallinie; a d, und mache mit dieser ein □, a d e f, so ist dieses genau noch einmal so groß, als das gegebene. Z. B. man wolle einen Tisch machen, der ein reines □ sein muß und genau 18 □' enthalten soll. So zeichne man ein □, dessen eine Seite 3' lang ist (Fig. 91), ziehe die Diagonallinie und mache mit dieser ein □, so ist die Aufgabe gelöst (nämlich die Diagonallinie ist die Länge der einen Seite des Tisches). Hieraus wird leicht einzusehen sein, daß, wenn man ein □, welches zwei andern, einem kleinern und einem größern, gleich sein soll (und auch mehren), man nur die 2 Längen von den Quadraten so aneinander zu setzen, daß sie einen rechten Winkel bilden, und die Hypotenuse zu ziehen hat, welche dann die Länge des verlangten Quadrates gibt.

15) Durch die Anwendung obigen Lehrsatzes können wir uns überall einen rechten Winkel, in Ermanglung der Instrumente, verschaffen. Man nehme

drei Stäbe, Schnüre ꝛc., trage auf einen 3 gleiche Theile auf, auf den andern 4 und auf den dritten fünf und lege sie in ein Dreieck zusammen, so hat man, wo die Stäbe mit 3 und 4 Theilen aufeinander stehen, den rechten Winkel (vergl. Fig. 91 bei a).

16) Es soll ein Kreis beschrieben werden, welcher an Quadratinhalt zwei andern gegebenen Kreisen (Fig. 93, A, B) gleich ist. Man setze die Halbmesser beider Kreise, a c, d f, so aneinander, daß sie einen rechten Winkel bilden (Fig. 93, c, g h i) ziehe die Hypothenuse h i, welche den Halbmesser des gesuchten Kreises gibt.

§ 16.

Von dem Oval (Linsenlinie), der Ellipse ꝛc.

1) Das Oval ist eine krummlinige Figur. Die gerade längere Linie, welche von einem Ende bis zu dem andern, durch den Mittelpunkt derselben, geht, heißt die große Axe. Die kürzere gerade Linie, welche senkrecht auf diese, ebenfalls durch den Mittelpunkt von dem einen bis zu dem andern Ende geht, heißt die kleine Axe.(Fig. 95 ist a b die große Axe und e m die kleine Axe.

2) Ein Oval zu zeichnen, zu welchem die große Axe gegeben ist. Dieses geschieht am leichtesten durch zwei sich schneidende Kreise. Fig. 95 a b ist die große Axe, diese theile man in 3 gleiche Theile, a c, c d, d b. Man setze den Zirkel in den Punkt c und beschreibe mit c a einen Kreis, setze den Zirkel in den Punkt d und beschreibe einen Kreis mit d c (mit gleicher Zirkelöffnung, weil die Halbmesser alle gleich sind). Diese Kreise durchschneiden sich in den Punkten e und f; man setze dann den Zirkel in e ein, beschreibe den Bogen g h, ebenso in f und beschreibe i k; die Senkrechte l m durch den Mittelpunkt o gezogen gibt die kleine Axe.

3) Man kann ferner ein Oval construiren durch zwei sich berührende Kreise. Man theile die gegebene große Axe (Fig. 96) in vier gleiche Theile, a c, c d, d e, e b; beschreibe mit c a einen Kreis, eben so mit e b, welche Kreise sich in d berühren. Hierauf mache man mit der Linie c e die gleichseitigen Dreiecke c e f und c e g, verlängere deren Schenkel bis an die Peripherien, dadurch entstehen die Punkte

h i und k l. Hierauf beschrieb man mit g k, aus g, den Bogen k l; das nämliche Verfahren wird bei f angewandt (die kleine Axe m n).

4) Eine richtige Eilinie zu construiren. Wenn in Fig. 97, a b die gegebene Breite ist, so ist die Senkrechte, c d, durch den Mittelpunkt auf dieser, die Axe. Man mache mit c a (der halben Breite) den Kreis a d b e; ziehe dann von a durch e und von b durch e verlängerte Sehnen, a f, b g; ziehe dann von a den Bogen b i und aus b den Bogen a h; aus e mache man alsdann mit e h den Bogen h i.

5) Eine andere Construction ist diese (siehe Fig. 98): Man theile die gegebene Breite, a b, in 6 gleiche Theile, ziehe die Axe c d. Hierauf nehme man einen dieser Theile, trage ihn von dem Mittelpunkt e nach d, so entsteht der Punkt f; dann ziehe man von 5 durch den Punkt f die Linie 5 h und von 1 durch f die Linie 1 i. Hierauf trage man zwei dieser gleichen Theile von e nach c, so entsteht der Punkt g; alsdann ziehe man durch g die Linie 1 l und 5 k. Man setze hierauf den Zirkel in 5 ein, öffne ihn bis a und beschreibe den Bogen k a h; hierauf beschreibe man mit 1 b den Bogen i b l, mit f h aus f den Bogen h i und aus g mit g k den Bogen g l.

Ueber obigen Paragraphen folgt noch Weiteres unten (siehe Inhalsverzeichniß).

5) Der Flächeninhalt eines Ovals wird gefunden, wenn man die Länge der halben großen Axe mit der Länge der halben kleinen Axe multiplizirt und was herauskommt (das Produkt) abermals mit 314 multiplizirt und von dem Produkte 2 Stellen abschneidet, z. B. in Fig. 96 hat die große Axe, a b, 6′, die kleine 4′, s. i. d. 3 (die halbe große Axe) × 2 (die halbe kleine Axe) = 6 × 314 = 18,84 = 18□′ 84□″. Diese Berechnung ist die bequemste, wenn sich die Axen, ohne Brüche zu bekommen, theilen lassen.

6) Ebenso richtig ist die Berechnung, 1) wenn man die ganze große Axe mit sich selbst multiplizirt, dann das Produkt mit 785 multiplizirt, von diesem Produkt 3 Stellen zur Rechten abschneidet und dann von diesen 1/3 (den dritten Theil) abzieht; oder 2) wenn man die halbe große Axe mit sich selbst multiplizirt, das Produkt mit 314, von diesem zwei Stellen zur Rechten abschneidet und von diesem jetzt

Erhaltenen den dritten Theil nimmt (vergl. Tschbch. S. 17. XV. und Anmerk.). Also die große Axe habe 6, wie oben, s. i:

1) 6 × 6 = 36 × 785 = 28,260
der dritte Theil davon = 9,42
8,84 = 8□′, 84□″ (siehe unter 5).

oder:

2) 3 × 3 = 9 × 314 = 28,26
das Drittel davon = 9,42
8,84 = 8□′ 84□″.

7) Um den Umfang einer Ellipse zu finden, addire man die Länge der großen Axe zur Länge der kleinen Axe, dividire die Summe durch 2, multiplizire den erhaltenen Quotient mit 314 und schneide zur Rechten 2 Stellen ab (vergl. Tschbch. S. 12. XI u. XII), z. B.

8) In Figur 96 hat die große Axe, a b, 39 Millimeter, die kleine Axe, m n, 23 Millimeter, folglich ist der Umfang 39 + 23 = 62 : 2 = 31 × 314 = 97,34 = 97,34 ($97^{34}/_{100}$) Millimet. Nehmen wir den Millimeter gleich einem Fuß an, so ist der Umfang 97′ 3″ 4‴ und setzen wir ihn = einem Zoll, s. i. d. 97″ 3‴ 4⁗ = 9′ 7″ 3‴ 4⁗.

9) In Figur 97 hat die kleine Axe, a b, 41 Millimeter, die große Axe, k l, 54 Millimet., mithin ist deren Umfang 54 + 41 = 95 : 2 = 47,5 × 314 = 149,150 = 149,150 = ($149^{15}/_{100}$) Millimeter.

10) Um den halben Bogen der Ellipse zu finden, hat man natürlich den ganzen Umfang nur mit 2 zu dividiren.

§ 17.

Von den Körpern.

(Vergl. Tschbch. S. 20 XVI, weil in jenem die Belehrungen, welche hier nicht vorkommen, schon enthalten sind.)

1) Wer nach dem Bisherigen (nach dem Taschenbuche und diesem) die Zeichnung und Berechnung der Flächen wohl aufgefaßt hat, für diesen hat die Körperberechnung und das Zeichnen keine Schwierigkeiten mehr. Es muß immer diejenige Fläche, welche die meisten Linien

(Winkel) Bögen ꝛc. hat, zur Grundfläche genommen werden.

2) Die Flächen, welche einen Körper einschließen, sind die Grenzen desselben, und alle Flächen zusammengenommen, nennt man seine Oberfläche. Ist die Oberfläche eines Körpers aus lauter ebenen Flächen zusammengesetzt, so heißt er ein eckiger, und ist sie aus krummen (wie die Kugel), oder zum Theil krummen Flächen zusammengesetzt (wie die der Halbkugel), so heißt er ein runder Körper. Sind die Flächen eines Körpers reguläre Figuren und sich gleich, so heißt er ein regulärer, im Gegentheil ein irregulärer Körper.

3) Zwei Flächen eines Körpers, welche mit ihren Grenzen zusammenstoßen, bilden eine Kante. Treffen mehr als zwei Kanten mit ihren Endpunkten zusammen, so bilden sie eine Ecke, oder einen körperlichen Winkel.

4) Ein jeder Körper besteht wieder aus kleinern Körpern.

5) Ein viereckiger Körper, welcher gleiche Länge, Breite und Höhe (Tiefe) hat (d. i. ein Körper, dessen 6 Flächen, von denen er eingeschlossen ist, lauter Quadrate sind), heißt ein Kubus oder Würfel (Fig. 99, a b c d e f g h). Nimmt man z. B. an, daß eine Seite, a b, davon einen Fuß lang sei, so ist natürlich jede Seite desselben einen Fuß lang, einen Fuß hoch und einen Fuß breit, und dessen Grundfläche, so wie jede der übrigen, ist ein □'; ein solcher Würfel heißt nun ein Kubikfuß. Würde eine Linie von diesem Kubus einen Meter lang sein, so wäre jede seiner 6 Flächen ein Quadratmeter und ein solcher Kubus heißt dann Kubikmeter (vergl. Tschbch. S. 1, 3 u. S. 2, 5).

6) Ein Körper muß wieder durch Körper gemessen werden (siehe oben 4). Einen Körper messen, oder den körperlichen oder kubischen Inhalt desselben zu bestimmen, heißt untersuchen, wievielmal ein angenommenes körperliches Maß in demselben enthalten sei. Und man wählte zum Maßstabe aller Körper den Kubus.

7) Um den kubischen Inhalt eines Winkels zu finden (vergl. Tschbch. S. 20, XVI).

8) Wäre der im 47sten Beispiel, Tschbch. S. 20, berechnete Würfel von Holz 2c., so ließen sich genau 27 Stücke, von denen ein jedes 1′ lang, 1′ breit und 1′ hoch ist, herausschneiden.

9) Wenn ein eckiger Körper gleiche Dicke hat und seine beiden Grundflächen (oben und unten) geradlinige, congruente (sich deckende, s. S. 14, e u. f) Figuren sind, welche einander parallel liegen, so heißt er ein Prisma (Ecksäule), und je nachdem die Grundsäule 3, 4, 5.... Seiten hat, heißt es 3, 4, 5....eckiges Prisma. Die Seitenflächen eines Prisma sind demnach so viel Parallelogramme, als die Grundfläche Seiten hat; und ist auch die Grundfläche ein Parallelogramm, so heißt es ein Parallelepipedum.

10) Jede Linie, welche von der Grundfläche nach der gegenüber parallelstehenden Fläche senkrecht geht, ist die Höhe des Prisma Fig. 100 (vergl. Tschbch. S. 21, 50).

11) In dem Parallelepipedum Fig. 101 ist a b = 13 Millimet., a c = 6 Millimet., a e = 10 Millim.; d. i. 13 × 6 = 78 □Millim. (Grundfl.) × 10 = 780 Kubik-Millim. (vergl. Tschbch. S. 2, 5).

12) Zu Fig. 102 (vergl. Tschbch. S. 22, 56).

13) In Fig. 103 sei a b = 1½, d c 1′ 3″, c g 5½′ (vergl. Tschbch. S. 23, 57).

14) Den ganzen innern Raum eines hohlen Gebäudes zu berechnen, dessen Giebel senkrecht stehen, Fig. 104. Man berechne zuerst den untern Raum A, als Parallelepipedum, dann den Raum unter dem Dache B als ein dreiseitiges Prisma. Es sei z. B. a b = 20 Meter, a c = 15 Met. und a e = 10 Met., so ist Parallelep. A = 20 × 15 = 300 □M. (Grundfl.) × 10 = 3000 Kubikmeter; e f = a b = 20, e g = a c = 15 und i l sei = 8 Met., so ist dreis. Prisma B = 15 × 4 (halbe Höhe) = 60 × 20 = 1200 Kubikmeter. A + B = 3000 + 1200 = 4200 Kubikmet. der Inhalt des ganzen Gebäudes.

15) Nehmen wir in obigen Beispielen an, a b = 60′, a c 45′, a e = 30′ und i b = 24′,

s. i. d. 60 × 45 = 2700 × 30 = 81000 Kubikf.
45 × 12 = 540 × 60 = 32400 Kubikf.
A B = 113400 Kubikf.

16) Ein schiefstehendes und ein senkrechtes Prisma, welche gleiche Grundfläche und Höhe haben, sind sich an kubischem Inhalte einander gleich (vergl. § 6, k 1).

17) In Fig. 105 A sei a b = 10′, n c = 5′, c e = 30′; so ist der Kubikinhalt von A, 5 × 5 × 30 = 750 Kubikfuß. In Fig. 105 B ist ebenfalls a b = 10′, b h = 5′ (siehe Tschbch. S. 8, VI. Anmerkung), m k = 30′ = 750 Kubikfuß.

18) Fig. 106 hat a b 2′ 2″, e c ist zu 1′ angenommen, c d = 6′ (s. Tschbch. S. 24, 59).

19) Die ganze Fläche, welche ein Prisma umgibt, findet man, wenn man den Umfang (aber nicht den Flächeninhalt) der Grundfläche mit der Höhe des Prisma multiplizirt und den Flächeninhalt der beiden Grundflächen besonders berechnet und dazu addirt. Z. B. in Fig. 106 hat eine Seite 2′ 2″ (Breite), d. i. 2,2 × 6 (6 Seiten) = 13,2 × 6 (die Höhe des Steins) = 79□′ 20□″ (vergl. Tschbch. S. 8, 18). Nun hat sowohl die Grundfläche A, als auch die obere Fläche B, eine jede (nach Tschbch. S. 24, 59) 3□′ 60□″ × 2 = 7□, 20□″, d. i. 79□′ 20□″
+ 7□′ 20□″
= 86□′ 40□″ die ganze Fläche, welche das Prisma umgibt.

§ 18.

Von den runden Körpern.

1) Die Walze oder der Cylinder ist ein runder Körper von gleicher Dicke, dessen Grundflächen (obere und untere Fläche) daher zwei concentrische Kreise sein müssen (Fig. 107). Denkt man sich durch die Mitte eines solchen Körpers von einer Grundfläche zur andern eine gerade Linie gezogen, welche durch den Mittelpunkt beider geht, so heißt diese die Axe (a, b).

2) In Fig. 107 sei c d (Durchmesser) 2′ und a b 11′; wie viel Kubi? (Vergl. Tschbch. S. 24, 60 ꝛc.)

3) Die krumme Fläche einer Walze findet man, wenn man die Peripherie der Grundfläche mit der Höhe der-

selben multiplizirt, z. B. Fig. 107, a b = 2′, mithin 314 × 2 = 6,28 × 11′ (Höhe) = 69,08 = 69 □′ 8 □″. Sollte diese Walze mit Blech ꝛc. umgeben werden, so wären also so viel Quadratfuß Blech dazu erforderlich. Eben so werden Röhren, Rohre ꝛc. berechnet.

4) Die ganze Fläche, welche eine Walze umgibt, wird gefunden, wenn man die krumme Fläche berechnet, dann die beiden Grundflächen und deren Inhalt zu jener addirt, d. i. (zu Fig. 107) 1 (halbe Dchmss.) × 314 = 3,14 × 2 = 6 □′ 28 □″; also ist 69 □′ 8 □″ + 6 □′ 28 □″ = 75 □′ 36 □″ die ganze Fläche.

5) Die krumme Fläche eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe seinem Durchmesser gleich ist, ist viermal so groß als seine Grundfläche. Z. B. ein Cylinder von 4′ Durchmesser und 4′ Höhe, dessen Grundfläche = 2 × 2 = 4 × 314 = 12 □′ 56 □″ Grundfläche. 314 × 4 = 12,56 × 4 = 50 □′ 24 □″ die krumme Fläche (s. oben I.); also 4 mal so groß als die Grundfläche.

6) Die krumme Fläche eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe seinem Durchmesser gleich ist, ist daher auch einem Kreise von doppelt so großem Durchmesser gleich. Die Kreise verhalten sich wie Quadrate ihrer Durchmesser; also ist ein Kreis von doppeltem Durchmesser viermal so groß, als der vom einfachen Durchmesser. (Vergl. Tschbch. S. 2 unten, und 3 oben.) Z. B. 1) Der Durchmesser eines Kreises = 4′ und 2) der eines andern = 8′.

1) 2 × 2 = 4 × 314 = 12 □′, 56 □″.
2) 4 × 4 = 16 × 314 = 50 □′, 24 □″; also viermal so groß als 1).

7) Der Kegel (Conus) ist eine von einer spitzzulaufenden Seitenfläche und von einer Kreisfläche (als Grundfläche) eingeschlossener Körper (Fig. 108), dessen Höhe ebenfalls durch eine senkrechte Linie, welche von der Spitze desselben senkrecht auf die Grundfläche fällt, bestimmt wird (c d) (vergl. Tschbch. S. 30, XII).

8) Z. B. der Kegel Fig. 108 a b = 10 Millimeter, c d 24 Millim., s. i. 10 × 10 = 100 × 785 = 78,50 Quadrat-Millimeter (Grundfläche) × 24 = 1884,00 : 3 = 628 Kubik-Millimeter.

9) Nehmen wir 1 Mill. = 1′ an, s. i. 10 × 10 = 100 × 785 = 78 □′ 50 □″ × 24′ = 1884,00 : 3 =

628 Kubikfuß; oder 5 × 5 = 25 × 314 = 78,50 × (²⁴/₃) 8 = 628 Kubikfuß.

10) Jeder Kegel ist der dritte Theil von einem Cylinder, welcher mit dem Kegel gleichen Durchmesser und Höhe hat (vergl. Tschbch. S. 30, XX).

11) Ein abgestutzter Kegel (Fig. 109) wird nach Tschbch. S. 31, XXIII) berechnet. Allein im gewöhnlichen Leben nimmt man den mittlern Durchmesser und berechnet ihn als Cylinder, z. B. a b = 10′, f g = 8′ = 10 + 8 = ¹⁸/₂ = 9′ mittl. Durchm. (oft wird auch der Durchmesser nur in der Mitte der Länge des Gegenstandes genommen, h i, welches aber nie der wahre mittlere Durchmesser ist) und c e 15′, d. i. 9 × 9 = 81 × 785 = 63,585 × 15 = 951 Kub.-Fuß, 775 Kub.-Zoll.

12) Ein Stamm Holz von 9″ mittl. Dicke und 15′ Länge = 9 × 9 = 81 × 785 = 63□″ 585 × 150″ = 9 Kubikfuß, 537 Kubikzoll, 750 Kubiklinien (vergl. Tschbch. S. 21, 51) oder 63,585 × 15′ = 9,537,75′ (wo noch eine Null angehängt wird, vergl. Tschbch. S. 1, 3 und Dezimalbruchrechnung) 9 Kubikfuß, 537 Kubikzoll, 750 Kubiklinien.

13) Die Walze, Fig. 110, hat, a b, 12′ Durchmesser, ist 30′ lang, und der Winkel des Sektors a c d, sowie f e c, hat 60°. Nun soll das Stück, welches der Sektor bezeichnet, a c d, f e c (ein dreiseitiges Prisma), durch die ganze Walze hindurch herausgeschnitten werden. Wie viel Kubikfuß bleiben dem übrigen Theil der Walze noch? (Vgl. S. 28, 7 zc.), d. i. 6 × 6 = 36 × 314 = 113 □′ 04 □″ × 30 = 3391 Kubikfuß, 200 Kubikzoll (Null angehängt) der Kubikinhalt der ganzen Walze. Nun ist der Sektor der 6te Theil der Kreisfläche, denn 360° : 60 = 6; 113,04 : 6 = 18,84 (Fläche des Sektors) × 30 = 565,20 = 565 Kubikfuß, 200 Kubikzoll (k. Inh. d. S.); also 3391 Kubikfuß, 200 Kubikzoll = 565 Kubikfuß, 200 Kubikzoll = 2826 Kubikfuß der Inhalt des übrigen Stückes der Walze. (Da also der Sektor der 6te Theil der Grundfläche ist, so ist er auch der 6te Theil vom Kubikinhalt der ganzen Walze = 3391,200 : 6 = 565 Kubikfuß, 200 Kubikzoll.)

14) In Fig. 111 seien alle Dimensionen die nämlichen, wie in Fig. 110. Es soll das Segment der Sehne c f durch den ganzen Cylinder abgeschnitten werden (c f a d); wie viel Kubikfuß hält der Rest der Walze (vgl. S. 29, 9)?

Aus vorhergehendem Beispiel ersieht man, daß die Fläche des Sektors = 18,84▭′; nun sei die Sehne 6′ lang und die Höhe (oder Tiefe) des △, n e, = 5′; also 3 × 5 = 15 ▭′ (die Fläche des △); 18,84▭′ — 15 = 3,84▭′ (▭Fläche des Segments) × 30 = 115,200′ (k. Inh. d. Segm.). Der Kubikinhalt der ganzen Walze = 3391,200 — 115,200 = 3276 Kubikfuß (als Rest d. W.). Die Walze, ohne Sektor, = 2826 + 450 dem △ des Sektors) + 115,200 (dem Segment) = 3391,200 Kubikfuß (dem k. Inh. der ganzen Walze).

15) Ein senkrecht- und ein schiefstehender Kegel, welche gleiche Grundfläche und Höhe haben, sind im kubischen Inhalte einander gleich. (Vgl. S. 20, k.)

§ 19.

Von den Pyramiden.

1) Die Pyramide (Spitzsäule) ist ein Körper, dessen Grundfläche ein Dreieck oder Vieleck sein kann und dessen Seitenflächen eben so viel Dreiecke sind, als die Grundfläche Seiten hat (Fig. 112 eine vierseitige Pyramide). Die Höhe ist eine von der Spitze auf die Mitte der Grundfläche gefällte Senkrechte, e f.

2) Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, welches mit der Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe hat. (Vergl. Taschenbuch, S. 30, XXII.)

3) In Fig. 112 a b = 3′, e f 8′. (Vergl. Tschbch., S. 30, 74.)

4) Zu Fig. 113 vergl. Taschenb. S. 30, 75.

5) Von der Berechnung abgekürzter Pyramiden. (Vergl. Tschbch., S. 31, XXIII.

6) In Fig. 114 sei a b 15′, f c 5′, g h 10′, l k 4′, e i (Höhe) 10′

△ a b e = 15 × 5 = 75 : 2 = 37,5 □′
+ △ g h k = 10 × 4 = 40 : 2 = 20,0

57,5:2 = 28,76□′
(mittl. Grundfläche).
× 10 = 287,50 = 287 K.′ 50 K.″ k. Inh. d. Pyram.

§ 20.

Von der Kugel.

1) Die Kugel ist ein runder Körper, dessen Oberfläche in allen ihren Theilen gleichweit von dem Mittelpunkte entfernt ist (Fig. 115).

Eine gerade Linie, welche man sich von einem Punkte, a, der Oberfläche bis zu einem andern in derselben, b, aber durch den Mittelpunkt, c, gezogen denkt, heißt der Durchmesser oder die Axe.

2) Der Durchmesser der Kugel, Fig. 115, sei 16″, wie groß ist ihre Oberfläche? (Vergl. Tschbch. S. 31, XXIV.)

3) Zu der Fig. 116 vergl. Tschbch. S. 32, 78.

4) Man findet auch die Oberfläche, wenn man die Peripherie mit dem Durchmesser multiplizirt. 20′ D. 314×20×62,80×20=1256|00=1256□′ der ganzen Oberfläche.

5) Bei einer länglichen Kugel, welche einen kürzern und einen längern Durchmesser hat, werden gewöhnlich beide addirt und durch 2 dividirt (der mittlere Durchmesser). Die Berechnung ist die nämliche, wie oben; z. B. die Kugel auf dem Kaufhaus-Thurme in Mannheim hat 3′ 6″ 5‴ zur Axe und 3′ Durchmesser (in der Mitte), d. i. 365‴ + 3′ = 665 : 2 = 3′ 3″ 2‴ 5⁗ (mittl. Durchm.) × 314 = 10,440|50 = 10′ 4″ 4‴.... × 3325 = 34□′ 71□″ 46□‴ Oberfläche, oder 3325 × 3325 = 11055625 × 785 = 8□′ 67□″ 86□‴ 65,625□⁗ × 4 = 34□′ 71□″ 46□‴.....

6) Eine solche Kugel besteht aus der Hälfte der Oberfläche von dem großen und aus der Hälfte der Oberfläche des kleinen Durchmessers. Dieses gibt folgende Berechnung:

3,65 × 314 = 11,46|10 × 365 = 418326 : 2
= 20□′ 91□″ 63□‴ (Oberfläche d. g. D.)
3 × 314 = 9|42 × 3
= 28,26 : 2 = 14□′ 13□″ (Oberfläche d. kl. D.)
35□′ 04□″ 63□‴

(Vergl. 5) u. Tschbch. S. 31, XXIII.)

7) Den kubischen Inhalt einer Kugel findet man, wenn man die größte Kreisfläche mit dem Durchmesser mul-

tiplizirt und das erhaltene Produkt abermals mit $^2/_3$ multiplizirt (vergl. Tschbch. S. 32, XXV).

8) Der Durchmesser der Erde wird gewöhnlich zu 1720 geographischen Meilen angenommen, also ist ihr Kubikinhalt = 1720 × 1720 × 785 = 2322344000 (größte Kreisfläche) × 1720 = 3994431680 × $^2/_3$ = 2662 Millionen 954453$^{33}/_{100}$ Kubikmeilen.

9) Ein Cylinder, eine Kugel und ein Kegel*) von gleichen Grundflächen und Höhen verhalten sich wie 3, 2 und 1 (Fig. 117, 118 u. 119), d. h. der Cylinder ist so groß wie die Kugel und der Kegel zusammengenommen, also hat die Kugel zwei Drittheile und der Kegel ein Drittheil des Cylinders, unter obiger Bedingung (a b = c f = i k; c d = g h = l m). Aus diesem wird das bisherige Verfahren klar werden (vergl. Tschbch. S. 30, XXII, S. 32, XXV und hier oben 7).

10) Bei der Berechnung hohler Körper (vergl. Tschbch. S. 23, XIX. Es ist natürlich, daß man die Flüssigkeit ꝛc. nach dem Landesmaaß berechnet, nach welchem der Körper berechnet wurde (vergl. Tschbch. S. 131 bis S. 134 incl.).

11) Fig. 120. Vergl. Tschbch. S. 28, 71, c d = 2′ 4″, a b = 2′, a e oder f g = 4′.

Dieses Faß hält 15$^2/_{10}$ K.′ (197 K.″); ist es nach badischem Faßmaaß berechnet, so müssen, um heraus zu bekommen, wie viel Maaß Flüssigkeit hineingehen, 15$^2/_{10}$ mit 18 multiplizirt werden (vergl. Tschbch. S. 134), weil der badische Kubikfuß 18 Maaß hält, d. i. 15,2 × 18 = 173,6 = 173$^3/_5$ Maaß.

12) Fig. 121 (vergl. § 16 ꝛc. u. Tschbch. S. 29, XX). Es sei a b (die große Axe) = 3′ und e f (die große Axe) = 3′ 5″ = 3′ + 35″ = 6,5 : 2 = 3′ 2″ 5‴, d. i. jetzt die große Axe im mittlern Durchschnitt genommen; die kleine Axe, c d, = 2,5′ und g h = 3′ = 2,5 + 3 = 5′ 5″ : 2 = 2′ 7″ 5‴ (die jetzige kleine Axe); die Länge des Oval-Fasses = 4′, mithin die Berechnung: Die halbe große Axe (nämlich mittlere D.-Axe) 3,25 : 2 = 1,625; die halbe kleine Axe ebenfalls so: 2,75 : 2 = 1,375 (vergl. S. 35, 5), 1,625 × 1,375 = 2,23437.... × 314 = 7,0159.... × 4 = 28 K.′ 063 K.″ 6.... (Vergl. 10 u. 11.)

*) Dieser Satz ist von Archimedes. Er ließ diese 3 Körper auf sein Grab setzen und Cicero fand sie dortselbst wieder.

Oder kürzer: a b = 3′; c d
= 2,5 = 3′ + 2,5″ = 5,5 : 2 = 2,75 D. vom Boden.
e f = 3′ 5″; g h = 3′
= 3,5 + 3′ = 6,5 : 2 = 3,25 D. der Mitte.
6,90 : 2 = 3′ mittlerer D.

Nun ist es als runder Körper (Walze) zu berechnen. 3 × 3 × 785 (nach der bekannten Regel) × 4 = 28 K.′ 260 K.″ (Die Differenz ist leicht erklärbar.)

13) Der Kubikinhalt der Kugel unter 5 ist demnach: 8□′ 67□″ 86‴ ... × 3′ 3″ 2‴, 5‴ = 28 Kubikfuß 856 Kubikzoll 345 Kubiklinien (als Cylinder) × 2 = 57,712690 : 3 = 19 Kubikfuß 237 Kubikzoll ... Kubikinhalt der Kugel.

14) Und nach 6) ist die Berechnung: 3′ 6″ 5‴ × 785 = 10,4581625 × 365 = 38,172,292 ... × 2 = 76,344584 : 3 = 25 Kubikfuß 448 Kubikzoll 194 Kubiklinien (Kubikinhalt der, ganzen, großen Kugel) : 2 = 12 Kubikfuß 724 Kubikzoll 097 Kubiklinien (Kubikinhalt der halben Kugel) und 3 × 3 × 785 × 3 = 21,195 × 2 = 42,390 : 3 = 14 Kubikfuß 130 Kubikzoll (Kubikinhalt der, ganzen, kleinen Kugel) : 2 = 7 Kubikfuß 065 Kubikzoll; also 12,724097
+ 7,065
= 19 K.′ 789 K.″ 097 K.‴ (der ganzen Kugel.)

15) Ferner wird der Kubikinhalt einer Kugel noch gefunden, wenn man die Oberfläche mit dem Durchmesser multiplizirt und das Product durch 6 dividirt (d. h. die Oberfläche mit 1/6 Durchmesser multiplicirt). Nach 6) ist die halbe Oberfläche der großen Kugel 20,916325□′ × 3,65 : 6 = 12 Kubikfuß 724 Kubikzoll 097 Kubiklinien: die halbe Oberfläche der kleinen Kugel = 14,13□′ ... × 3 : 6 = 7 K.′ 065 K.″; also 12 K.′ 724 K.″ 097 K.‴
× 7 „ 065 „ — „
= 19 K.′ 709 K.″ 97 K.‴ (vergl. 14).

16) Sind Gegenstände (Mauerwerk ꝛc.) aus mehreren Bögen zusammengesetzt (Fig. 122), so suche man zu dem Bogen a e, b f (nach § 11, 2 ꝛc. S. 25) den mittleren Durchschnittskreis zu diesem Bogen (das Warum? wird keine Erklärung mehr brauchen). Hier findet man den Mittelpunkt n. Nun ist der Halbmesser c n = 28′ (der Fuß = 1 Millimeter angenommen), 56 (der ganze Durchmesser)

$\times$ 314 = 175,84 (= 175′ 8″ 4‴ Peripherie). Der Winkel am Mittelpunkt hat 56°, mithin 360° geben 175,84′ Länge, wie viel Fuß geben 56°? d. i. 175,84′ $\times$ 56° : 360° = 27′ 3″ 5‴.... Die Länge des Bogens n i; a e (die Dicke) = 5′; 27′ 3″ 5‴ $\times$ 5 = 136,75 = 136▭′ 75▭″ (die Fläche a e b f) $\times$ 2 (weil b f g c = a e b f) = 273,50 = 273▭′ 50▭″. Nun ist die Länge b m = 47′, also 273,50 $\times$ 47 = 12854,50 = 12854 K.′ 500 K.″

17) Mit einiger Ueberlegung wird man leicht einsehen, daß sich obige Construction in vielen Fällen anwenden läßt; z. B. es soll ein Bogen über ein 6′ langes Gesimse von 6″ Höhe auf eine Wand gezeichnet werden. Man zeichne im verjüngten Maßstabe die Linie a b (Fig. 123) 6′ lang (hier sind 5 Millimeter als 1 Fuß angenommen), theile sie in 2 gleiche Theile (d. i. eine senkrechte in der Mitte errichten), c d, trage auf diese die 6″ (hier 3 Millimeter, 1 Millimeter = 2″). Das übrige Verfahren ist bekannt. Wenn man den Mittelpunkt f e gefunden hat, so mißt man die Linie f e, diese hat 34 Millimeter, also im vergrößerten Maßstab 6′ 8″. Nun macht man auf die Wand in die Mitte der Linie a b die 6″ hohe Linie c e, trägt auf einen Senkel die 6′ 8″, hält ihn in den Punkt e, läßt ihn fallen, so hat man die Linie e f, in f hält man ihn fest (läßt ihn halten) und beschreibt aus f mit dem obern Ende den Bogen a e b.

18) Fig. 124. (Vergl. Tschbch. S. 29, 73 rc.

19) Den Durchmesser von einem Cylinder zu finden, wenn man den Kubikinhalt und die Höhe weiß. Man multiplicire die Höhe mit 785, schneide drei Stellen zur Rechten ab, dividire mit dieser Zahl (Product) in den Kubikinhalt und ziehe dann aus der jetzt erhaltenen Zahl (Quotient) die Quadratwurzel, welches die Länge des Durchmessers gibt. (Vergl. Tschb. S. 17, XV. und Anhang zum geometr. Zeichnenb.) Z. B. ein Cylinder hat 196 K.′ 250 K.″, ist 10′ hoch; wie groß ist sein Durchmesser? D. i. 785 $\times$ 10 = 7,850; 196,250 : 7,850 = 25 = $\sqrt{25}$ = 5′ Durchmesser.

20) Es soll ein Faß von 1000 Liter Inhalt (d. i. 1000 Kubik-Decimeter) gemacht werden und soll 1 Meter (10 Decimeter) hoch sein, wie groß ist dessen mittlerer Durchmesser? D. i. 785 $\times$ 10 = 7|850; 1000,000 : 7,850

(vergl. Anhang zum geometr. Zeichnenb.) = 127,3885 . . . $= \sqrt{1|27,\ 38|85} = 11{,}286$ = 11 Decimeter 2 Centimeter 8,6 Millimeter (1 Meter 1 Decimeter 2 Centimeter 8,6 Millimeter) Länge des Durchmessers.

21) Die Höhe (Länge) eines Cylinders zu finden, wenn der Kubikinhalt und Durchmesser angegeben ist. Man multiplicire den Durchmesser mit sich selbst; die dadurch erhaltene Zahl mit 785, schneide zur Rechten 3 Stellen ab und dividire durch diese jetzt erhaltene Zahl den Kubikinhalt des Cylinders. Z. B. ein Cylinder hat 5′ Durchmesser und sein Kubikinhalt beträgt 196 K.′ 250 K.″, so ist dessen Höhe $5 \times 5 = 25 \times 785 = 19{,}625$; $196{,}250 : 19{,}625 = 196250 : 19625 = 10'$. (Vergl. oben 19 und 20.)

22) Um den Durchmesser einer Kugel zu finden, wenn deren Kubikinhalt bekannt ist. Man multiplicire den Kubikinhalt der Kugel mit 6, dividire dieses Product mit 3,14 (vergl. Division der Decimalbr. ꝛc. im Anhang) und ziehe aus diesem Quotient die Kubikwurzel. Z. B. der Kubikinhalt einer Kugel hat 113 K.″ 40 K.‴, s. i. d. 113,040 (warum die Null nach dem Komma?) $\times 6 = 678{,}240 : 3{,}140 = 216 : \sqrt[3]{216} = 6''$ Durchmesser.

23) Ebenso kann man, wenn man das Gewicht von einer Kugel hat, deren Durchmesser sehr nahe bestimmen. Z. B. es soll eine Kugel von Gußstahl $66^{315744}/_{1000000}$ Pfd. wiegen, wie viel Decimeter oder Centimeter hat sie im Durchmesser? In dem Tschb. S. 133 findet man, daß 1 Kubikdecimeter $15^{84}/_{100}$ Pfund wiegt. Die Berechnung s. Anhang S. 44.

§ 21.

1) Wenn man den Kubikinhalt eines Würfels weiß und man will die Länge von einer Seite desselben wissen, so muß man aus jenem die Kubikwurzel ziehen. Z. B. man soll ein Gefäß machen, das einen Kubus bildet und 23958 badische Maß enthalten muß; d. i. 23958 : 18 (warum?) = 1331 K.′ $\sqrt[3]{1331} = 11'$ jede Seite des Würfels.

2) Soll ein gegebenes Gefäß noch einmal so groß gemacht werden, so lasse man die Grundfläche (Boden) un=

verändert und nehme die Höhe doppelt; oder man lasse die Höhe und mache den Boden noch einmal so groß (d. h. aber nicht, daß, wenn der Boden 2′ Länge hat, man demselben 4′ geben muß; denn 2 $\times$ 2 = 4 Q.′ und 4 $\times$ 4 = 16 Q.′ — Vergl. § 15, 11 ꝛc.)

3) Es soll ein Stein gemacht werden, welcher so groß ist, als 4 Steine (ebenfalls Würfel), von welchen die Seite des ersten 12′, des zweiten 20′, des dritten 25′ und des vierten 30′ lang ist. Wie lang muß dessen Seite (Kante) werden? (S. Anhang S. 47 ꝛc.)

4) Ist das Gefäß ein Cylinder und der Boden soll noch einmal so groß gemacht werden, so muß man den Durchmesser mit sich selbst multipliciren (zum □ erheben) dieses abermals mit 2 multipliciren und daraus die Quadrat-Wurzel ziehen, so erhält man den gewünschten Durchmesser. Z. B. man hat ein cylinderförmiges Gefäß, welches 62 K.′ 800 K.″ enthält und 4′ Durchmesser hat; nun will man ein Gefäß von 125 K.′ 600 K.″ Inhalt und von gleicher Höhe haben (nämlich noch einmal so groß), wie groß muß der Durchmesser sein? Die Berechnung s. Anhang S. 46; ferner vergl. § 15, 11 ꝛc.

§ 22.

Nachträgliche Erklärungen zur Ellipse (§ 16).

Die wirkliche Ellipse, nämlich deren Zeichnung, wird im praktischen Leben weniger angewandt, weil sie umständlich und einer besondern Uebung erfordert, und die Ueberzeugung hat gelehrt, daß es einer sehr faßlichen Erklärung bedarf, (obgleich, wer sie einmal gemacht, es sehr leicht ist), um deren Zeichnung aus einer Schrift zu erlernen. Nachstehende Erklärung wird sie auf das Deutlichste darstellen.

Z. B. es soll eine Ellipse gezeichnet werden, deren große Axe 67′ und deren kleine Axe 56′ lang ist. Siehe Fig. 125.

Man mache zwei sich in der Mitte senkrecht schneidende Linien, A B, C D, trage die große Axe E F auf A B und die kleine G H auf C D; hierauf nehme man die halbe große Axe F I in den Zirkel, setze ihn in den Punkt H ein, beschreibe die Bögen k l, m n; dadurch entstehen die Punkte O P, welche man die Brennpunkte heißt; nachdem mache man von i

nach O beliebige Theile, 1, 2, 3 (je mehr man macht, desto leichter läßt sich die Ellipse zusammen ziehen), aber immer den nächsten kleiner, als den vorhergehenden; dann setze man den Zirkel in den Endpunkt E ein, öffne ihn bis in den Punkt 3, alsdann setze man ihn in den Brennpunkt O ein und mache mit dieser Oeffnung E und 3 aus O, den Bogen q r oberhalb und den Bogen s t unterhalb der großen Axe; hierauf setze man den Zirkel mit gleicher Oeffnung in den Brennpunkt P, und mache aus P ebenso die Bögen u v und w x. Hierauf setze man den Zirkel in den Endpunkt F, öffne ihn bis in den Punkt 3, setze ihn wieder in P ein und durchschneide mit der Oeffnung F 3 die Bögen q r und s t durch die Bögen y z und α β; mit beibehaltener Oeffnung setze man in O ein und durchschneide die Bögen u v und w x durch die Bögen γ δ, ε ρ, so entstehen die Punkte 4, 5, 6 und 7. Man setze wieder in E ein, öffne den Zirkel bis in den Punkt 2, setze mit dieser Zirkelöffnung wieder in O und beschreibe die Bögen z ι, $\varkappa$ λ ober- und unterhalb der großen Axe; mit gleicher Oeffnung setze man in P ein und mache die Bögen μ ν und τ ς; man setze wieder in F ein, öffne den Zirkel bis in den Punkt 2, setze in P ein und durchschneide mit beibehaltener Oeffnung ι z und $\varkappa$ λ durch die Bögen υ ϕ, χ ψ, so erhält man die Punkte 8 und 9; mit gleicher Oeffnung setze man in O ein und durchschneide μ ν und τ ς durch die Bögen a b und c d, so erhält man die Punkte 10 und 11. Hierauf setze man wieder den Zirkel in E und öffne ihn bis in den Punkt 1, setze in O ein und beschreibe **a b** und **c d**, setze mit der nämlichen Oeffnung in P ein, beschreibe **e f** und **g h**, setze in F ein, öffne den Zirkel bis in 1, setze mit dieser Oeffnung in P ein und durchschneide **a b** und **c d**, so entstehen die Punkte 12 und 13; setze in O ein, durchschneide **e f** und **g h**, so hat man die Punkte 14 und 15. Man kann noch, wenn man es für nöthig erachtet, E O nehmen, in O einsetzen, einen Bogen ziehen, dann F O in den Zirkel nehmen, ebenfalls wie immer in P einsetzen, einen Bogen ziehen; Gleiches geschieht auch auf der andern Seite, und wo beide Bögen sich trennen, hat man noch einen Punkt zur Peripherie des Ovales (16 und 17). Hierauf ziehe man sämmtliche Punkte durch gebogene Linien aus freier Hand zusammen. (Mit dem Zirkel läßt sich eine derartige Peripherie nicht ziehen.) Am leichtesten werden die Ovale von jeder beliebigen Größe mit dem sogenannten Ovalzirkel gezeichnet.

F. 128 zeigt die vollständige Zeichnung desselben, welche man in nämlicher Größe ausführen kann.

Man mache von einem, etwa 5 Millimeter dicken Brettchen, ein Quadrat, A B und C D, I., schneide von einer Ecke zur anderen die Fugen ab, — a b, c d, — e f, g h, bis in die Hälfte der Dicke des Brettchens (2—3 Millimeter tief). Auf die rechte und linke Seite bohre man 2 Löcher, t, u, um es zum Gebrauche befestigen zu können. Hierauf mache man 2 Klötzchen, 10—12 Millimeter lang und 2—3 Millimeter dick, i k, l m, n o, p q, welche sich leicht in die Fugen einschieben lassen und mit der Oberfläche eine Ebene haben; in diese schlage man, in ein jedes, einen aufwärts stehenden Stift, r, s. Nun mache man ein Liniälchen, v w, x y, von beliebiger Länge, mache 15—20 gleich weit von einander stehende Löchelchen (hier 3 Millimeter von einer Mitte zur anderen) hinein, um es dadurch auf die Klötzchen setzen zu können. Am vorderen Ende wird ebenfalls ein größeres Loch, Z, gemacht, um einen Bleistift ꝛc. hineinstecken zu können. (Fig. 128, II.) Man schiebe ein Klötzchen, n o, p q, durch die Fuge a b bis an das Ende, D; hierauf das zweite, i k, l m. durch die Fuge e f bis in deren Mitte. (Fig. 128, III.) Nun setze man durch 2 Löchelchen in die 2 Stiftchen r s das Liniälchen auf das Brettchen, befestige es in t und u, daß der Mittelpunkt (r) auf die Mitte kommt, wo man das Oval ziehen will, und stecke einen Bleistift durch die Oeffnung z, fahre von L gegen M und so fort herum, bis der Stift ꝛc. wieder in den Punkt L kommt, so ist ein ganz richtiges Oval gezeichnet. Durch das Schieben der Klötzchen und durch das verschiedene Einsetzen des Liniälchens, weshalb die Löchelchen, und durch das Verlängern des Liniälchens (durch eine Schnur ꝛc.), kann man die Axen des Ovals nach jedem Belieben machen, also ein Oval von jeder Größe zeichnen. Wenn man die Grundlinie a b doppelt nimmt, so bekommt man, wie früher schon gelehrt, einen Zirkel, welcher viermal so groß wird und für größeren Gebrauch sehr praktisch ist. Das Weitere lehrt sich Alles von selbst.

§ 23.

Von der Spiral- und Schneckenlinie.

Um eine Spirale zu zeichnen (F. 129), ziehe man eine Hilfslinie, a b, mache ungefähr in deren Mitte einen Punkt,

c, setze den Zirkel in c ein, öffne ihn, je nachdem man die Spirale eng oder weit ziehen will, bis d, beschreibe unterhalb der Linie aus c, d e, setze in d ein, beschreibe oberhalb e f, setze in c ein, beschreibe f g, setze in d ein, mache g h, setze in c ein, beschreibe h i, setze in d ein, mache i k u. s. f., so lang man die Spirale haben will. Die Halbkreise auf der obern Seite der Linie a b laufen miteinander parallel, sowie die auf der untern Seite, weil für die obere immer d und für die untere c der Mittelpunkt ist.

Bei der Zeichnung der Schneckenlinie wird ebenfalls eine Hilfslinie, a b (Fig. 130), gezogen. Ungefähr in der Mitte dieser Linie mache man einen Punkt, c. Von c aus mache man eine beliebige Anzahl gleicher Theile nach a und b (hier 2 nach b und 4 nach a), hierauf setze man den Zirkel in c, öffne ihn bis 2 und beschreibe einen Kreis um c; alsdann setze man den Zirkel in 3, öffne ihn bis 2 und beschreibe unterhalb der Linie um 3 den Halbkreis s t; dann setze in 1 ein, öffne ihn bis t, ziehe aus 1 oberhalb den Halbkreis t u; alsdann setze man in 4 ein, öffne den Zirkel bis u und aus 4 unterhalb u v; hierauf setze man in 2 ein, öffne den Zirkel bis v und ziehe aus 2 oberhalb v w; alsdann setze in 5 ein, nehme 5 w und ziehe aus 5 unterhalb w x u. s. w. Für die Halbkreise unter der Linie a b sind die Mittelpunkte links von c.

§ 24.

Den Kubikinhalt eines jeden irregulären Körpers durch Tariren zu finden.

Unter Tariren versteht man hier gleichsam, einen Körper von einem andern abzuziehen.

Durch das Tariren kann man den Kubikinhalt aller Körper genau bestimmen. Man nehme nämlich ein hohles viereckiges Prisma oder Parallelepipedum (Fig. 131) und lege den zu berechnenden Körper hinein; hierauf übergieße man ihn mit Wasser, oder wenn er dieses nicht vertragen kann, ebene man ihn mit Sand ein. Alsdann merke man genau die Höhe des Sandes, nehme den Körper heraus und ebene den Sand wieder. Z. B. Es läge der Körper in obgenannter Figur, und das Wasser oder der Sand ginge bis k l (man kann das Gefäß auch ganz voll machen, d. i. bis c d e f), und nachdem er herausgenommen wurde und wie-

der geebnet, nur noch bis h i; alsdann werden die beiden, durch obiges Verfahren gestalteten, Körper berechnet und einer von dem andern abgezogen, deren Rest dann den Kubikinhalt des zu berechnenden Körpers gibt. Man nehme an a k = 6′; a b = 10′; b g = 4′ und a h = 4′, d. i. also 6 × 10 = 60 × 4 = 240 Kubikfuß und 4 × 10 = 40 × 4 = 160 Kubikfuß; 240 — 160 = 80 Kubikfuß; der Kubikinhalt des tarirten Körpers.

§ 25.

Das Zeichnen der verschiedenen Netze, womit geometrische Körper zusammengelegt werden können.

(Durch das Zeichnen und Zusammenlegen der Netze können Anfänger die geometrischen Körper leichter begreifen und haben sonst noch Vortheile.)

1) Das Netz zu einem Tetraëdron (Fig. 132), d. i. ein Körper, der von vier gleichen, gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird (ein gleichseitig dreieckiger Körper). Man beschreibe ein gleichseitiges △, theile die Seiten in zwei gleiche Theile, d, e und f, und ziehe die Linien d e, e f und e d. Die Seite o ist die Grundfläche. Soll es nach einem Maß oder über einen Körper gemacht werden, so mißt man eine Seite und trägt sie zweimal auf a c ꝛc. Damit man die Netze zusammenlegen kann (auch zusammenkleben), so läßt man neben einige Räume (Fig. 132 ꝛc.).

2) Das Netz zu einem Octaëdron (Fig. 133), d. i. ein Körper, der von acht gleichen, gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. Man zeichne die Figur 132, verlängere a c um die Hälfte (a d) bis c g, mache mit d g das nämliche gleichseitige △ unterhalb a g, sowie das entgegengesetzte △ i h c, wie es die Figur zeigt; m o kommen übereinander, dann fällt die Figur von selbst in sich zusammen. (Es ist natürlich, daß da, wo eine Linie ist, zuerst ein Bug gemacht werden muß.)

3) Das Netz zu einem Hexaëdron (Würfel.) (Fig. 134.) Ziehe eine Linie, a b, und trage die Seite eines Würfels viermal darauf, a i, i l, l n, n b, mache mit a b und a c (a c = a i) das Rechteck a b c d, ziehe die Linien n o, l m, i k mit b d parallel. Dann verlängere man l m bis h (m h = l m), ebenso i k bis f (k f = i k) und ziehe die Linie f h. Gleiches thue man mit k i nach e, m l nach g ꝛc.

4) Das Netz zu einem Parallelepipedum (Fig. 135). Man ziehe eine Linie, a b; in a errichte man eine Senkrechte, a c, = der Länge des Parallelepipedums, mache c d mit a b parallel. Trage dann auf a nach b die Höhe des Parallelepipedums, a e, aus e die Breite, e f, aus f die Höhe, f g, aus g die Breite, g b, ebenso auf c d, und ziehe die Linien e h, f i, g k, b d. Hierauf verlängere man e h und f i nach beiden Seiten, mache dann h l = c h und ziehe l m parallel mit h i. Gleiches Verfahren wird bei e f p q befolgt. (Die Flächen n o kommen zuerst übereinander.)

5) Das Netz zu einem Prisma (Fig. 136). Auf eine Linie, a b, trage man die Seiten der Grundfläche, a c, c d, d b, errichte in a eine Senkrechte, a e, = der Höhe des Prisma und ziehe c g, g h, h f mit a b parallel. Hierauf beschreibe mit c d und g h die Dreiecke g h i und c d k. Wenn die Grundfläche ein Fünf-, Sechs- ꝛc. Eck werden soll, so wird auf die Grund- und Oberfläche ein Fünf-, Sechs- ꝛc. Eck, und natürlich auch so viele Seiten, beschrieben.

6) Das Netz einer dreieckigen Pyramide (Fig. 137). Man ziehe mit der Länge einer Seite der Pyramide, a e, eine Linie, beschreibe mit der Länge dieser aus a einen Bogen, e g, trage in diesen die Linien des Umfanges, e d, d c, c b, und beschreibe auf d c die Grundfläche der Pyramide, d c f.

7) Das Netz zu einem Dodecaëdron (Fig. 138), d. i. ein Körper, der von zwölf gleichen, regulären Fünfecken begrenzt wird. Man beschreibe ein reguläres Fünfeck, a b c d e, lege dann das Lineal an d und b und ziehe die Linie b l, mache sie = a b, ebenso lege es an d und a und ziehe die Linie a g; mache a g = a b = b l; hierauf mache man mit a b einen Bogen aus g und durchschneide ihn aus l, so erhält man den Punkt q und das Fünfeck a b g l q. Es ist nun leicht, auf diese Art sämmtliche Fünfecke zu construiren, wie sie die Figur zeigt.

8) Das Netz zu einem Ikosaëdron (Fig. 139), d. i. ein Körper, der von zwanzig, gleichen, gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist. Man mache ein gleichseitiges △, a b c, verlängere die Linien a, w (d. i. a w), trage a b noch viermal auf a w (a d), ziehe c e mit a d parallel, mache auf c e, c n i = a c b, so auch m r e, ziehe eine Hülfslinie, n r,

mache die Punkte o, p, q = a b von einander; gleiches Verfahren mache man unterhalb der Linie a d und ziehe die Punkte durch Linien zusammen, wie es die Figur zeigt.

Nach Ueberlegung des Bisherigen und guter Anschauung der Körper wird man alle beliebigen Netze leicht zeichnen können.

9) Das Netz zu einem Cylinder (Fig. 140). Man mache ein Rechteck, in welchem die Grundlinie der Peripherie und die Länge der Höhe des Cylinders gleich ist, a b c d, hierauf verlängere a c bis f und e; a f und a c = dem Durchmesser des Cylinders und beschreibe die beiden Kreise.

II. Abschnitt.

§ 1.

Leichtfaßliche Beweise, welche noch zur Ergänzung nöthig sind.

1) Lehrsatz: Sind in einem Dreiecke die drei Seiten bekannt, so sind es auch die drei Winkel, und das Dreieck ist vollkommen bekannt.

Beweis: Setzt man (Fig. 36) die Linien a b, c d, e f zusammen, so bestimmen sich (Fig. 36) die Winkel von selbst und das Dreieck bleibt immer das nämliche, man mag den Linien eine Lage geben, welche man will.

2) Lehrsatz: Wenn zwei Seiten und ein Winkel bekannt sind, so ist 2c.

Beweis: 1) Sind (Fig. 42) die zwei Seiten e f, e g und der Winkel x, den sie einschließen, bekannt, und man verbindet die Endpunkte f g der gegebenen Linien, so bestimmen sich die 2 Winkel und die dritte Seite von selbst.

2) Ist ein anderer (Fig. 89) als der eingeschlossene Winkel x gegeben, und wird dieser auf einer der bekannten Linien, hier auf e f bei f, $<$ e f g, gesetzt, und die Linie f g unbestimmt verlängert, so wird die zweite bekannte Linie e g dieselbe in einem bestimmten Punkte, g, durchschneiden oder

berühren, wodurch wieder die drei Winkel und Seiten bekannt werden. (Vergl. § 5 e f ꝛc.)

3) Lehrsatz: Wenn in einem Dreiecke nur eine Seite und zwei Winkel gegeben sind, so ist ꝛc.

Beweis: 1) Liegen (Fig. 43) die beiden Winkel o und x auf der bekannten Seite, so wird sich der dritte Winkel und die Länge der beiden Seiten durch die Verlängerung der beiden Schenkel, die sich in einem bestimmten Punkte, c, durchschneiden werden, von selbst bilden.

2) Liegt von den zwei bekannten Winkeln (Fig. 141, Tab. III.) nur einer auf der bekannten Seite a b, hier der Winkel o, so wird der andere auf einem willkürlichen Punkte, c, der Seite a c gesetzt und der Schenkel c d gezogen, welcher die Linie a b in d schneidet. Wird nun aus dem Punkte b eine Parallellinie mit c d gemacht, so bestimmt diese wieder das ganze Dreieck a b f.

4) Lehrsatz. (Siehe S. 17, k. 5.)

Beweis: Wenn man (Fig. 142) die Grundlinie a b in zwei gleiche Theile theilt und aus dem Winkel p, der dem Theilungspunkte d gegenübersteht, eine Linie auf diesen zieht, so erhält man zwei Dreiecke, wo a d = d b wegen der gleichen Abtheilung, a c = c b wegen den gleichen Schenkeln, und c d = c d, d. i. beiden gemein ist. Es sind also auch (zwei Dreiecke, die durchaus gleiche Seiten haben, sind congruent) die drei Winkel einander gleich, indem beim Aufeinanderlegen der Winkel a den Winkel c decken wird. (In dem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich, weil dasselbe auch gleichschenkelig ist; und alle drei Winkel, durch Veränderung des Dreiecks, zu Winkeln an der Grundlinie gemacht werden können.)

5) Lehrsatz: Die drei Winkel in einem Dreiecke halten zusammen 180° (Fig. 144).

Beweis: Man verlängere alle drei Seiten des Dreiecks und ziehe mit der Grundlinie a b an der Spitze des obern Winkels eine Parallellinie, c d, diese beiden Parallellinien werden durch n r und p r durchschnitten und bilden bei n und o, p und q Wechselwinkel, welche, wie früher erwiesen wurde, einander gleich sind. Man kann also statt des Winkels n den Winkel o und statt p den Winkel q setzen. Da sich nun aus der Spitze r ein halber

Kreisbogen um alle drei Winkel beschreiben läßt, welcher 180° hält, so ist es klar, daß die drei Winkel ($< <$ n p r) zusammen 180° ausmachen.

6) Lehrsatz: Der äußere Winkel, der in einem Dreiecke durch die Verlängerung einer Seite entsteht, ist gleich den zwei innern, entgegengesetzten (Fig. 45) $< n = < o + p$.

Beweis: Der Winkel $<$ a b c hält mit $<$ b a c und $<$ a c b 180°, als die drei Winkel eines Dreiecks; aber auch a b c hält mit $<$ n als Nebenwinkel 180°, daher n so groß sein muß, als $<$ b a c und $<$ a c b miteinander, weil der $<$ b a c überall abgezogen werden kann.

Zusatz: Wenn der äußere Winkel eines gleichschenkeligen Dreiecks gegeben ist, so sind in demselben wieder alle drei Winkel bekannt, weil entweder einer an der Grundlinie, oder der an der Spitze als Nebenwinkel bekannt wird, und die übrigen durch Subtraction von 180° gefunden werden.

7) Lehrsatz: Ein jedes Parallelogramm kann durch eine Diagonallinie in zwei congruente Dreiecke getheilt werden. (S. 20, k, Fig. 56.)

Beweis: Die Linie a d = b c, a b = d c und b d beiden gemein; es sind also auch die drei Winkel einander gleich und folglich das Dreieck a b d = b c d.

8) Lehrsatz: Wenn in einem Parallelogramme eine Linie, wie sie auch laufe, durch den Mittelpunkt der Diagonallinie gezogen wird, so ist dasselbe in zwei gleiche Theile getheilt.

Beweis: Das Dreieck (Fig. 143) A ist gleich dem Dreiecke B, weil die Vertikalwinkel x = y, die Wechselwinkel o = n, und die Seite a x = y c, folglich zwei Winkel und eine Seite einander gleich sind.

Es ist ferner A + C = A + D. Nimmt man die gleichen Theile A und B hinweg, welches ohne Verletzung der Gleichheit geschehen kann, so ist C = D. Wird nun zu C das B und zu D das A hinzu gethan, so ist A + D = C + B.

9) Lehrsatz: Parallelogramme von einerlei Grundlinie und Höhe sind einander gleich. (Vergl. S. 20, k. und Fig. A, B, C. Um diesen Beweis ganz deutlich darzustellen, finden sich diese Figuren auf der Tafel III unten.)

Beweis: Dreierlei Fälle können hier vorkommen, wie Figg. A, B, C zeigen, wo überall die Parallelogramme anders verschoben sind.

In der Fig. A ist das Dreieck a = b und b = c wegen der Diagonallinien, welche die Parallelogramme in zwei gleiche Theile theilen; es ist also auch a = c und folglich a + b = b + c.

In der Fig. B ist a c = e f und b d = c f als gegenüberstehende Seiten eines Parallelogramms; es sind also auch b d = a c. Nimmt man bei Beiden Gleiches, nämlich b c, hinweg, so bleibt a b = c d. Da nun auch a e = c f und e b = f d ist, als gegenüber stehende Seiten des Parallelogramms, so ist das Dreieck x = z und x + y = y + z, und folglich das Parallelogramm a e f c = b e f d.

In der Fig. C ist wieder aus den obigen Ursachen e f = c d und c d = a b. Setzt man nun zu a b und c d überall Gleiches, nämlich b c, hinzu, so ist a c = b d. Da nun auch a e = b f und e c = f d ist, so sind die Dreiecke a e c und b f d einander gleich. Nimmt man von Beiden das Dreieck o hinweg, und setzt zu jedem das Dreieck n hinzu, welches ohne Schaden der Gleichheit geschehen kann, so ist m + n = p + n, und folglich das Parallelogramm a e f b = e c d f.

10) Da Dreiecke nichts Anderes als Hälften von Parallelogrammen sind, in dem jedes zu einem Parallelogramm ergänzt werden kann, so sind auch Dreiecke von einerlei Grundlinie und Höhe einander gleich. Es ist demnach das Dreieck (Fig. 58) a b c = a b d.

11) Wenn ein Parallelogramm und ein Dreieck gleiche Grundlinien und Höhen haben, ist das Parallelogramm doppelt so groß, als das Dreieck. (Vergl. Tschbch. S. 8, VI.) Das Parallelogramm (Fig. 145) a b c d und das Dreieck e b c haben gleiche Grundlinien, b c, und gleiche Höhen, weil sie in der Parallele a e liegen.

Man ziehe a c, so ist Dreieck a b c = Dreieck e b c (s. 10). Also ist a b c d = 2 △ a b c (s. 7) und 20 i). Folglich ist auch a b c d = 2 △ e b c.

12) Lehrsatz: Das Quadrat der Hypothenuse 2c. (s. S. 31, 13 und Fig. 92).

Beweis: Beschreibe mit jeder Seite des Dreieckes auf dieselbe ihr Quadrat, b d e c, a b f g, a c k h, so sind

b a c und b a g rechte Winkel und g a, a c liegen in gerader Linie; nun ziehe man a d und f c, mache durch a eine Parallele, a l mit b d. Da der $<$ d b c = f b a (s. S. 8, 10), so ist, wenn der $<$ c b a hinzukommt, d b a = f b c. Auch ist a b = b f und d b = b c; also △ a b d = △ f b c (s. oben 2). Weil aber a l mit b d und g c mit f b parallel, so ist das Rechteck b l (durch 2 Buchstaben über das Kreuz bezeichnet) = 2 △ a b d (s. oben 11), f b und b d als Grundlinien der Dreiecke angenommen) und das □ a b f g = 2 △ f b c; daher ist Rechteck b l = □ a b f g (nach dem Grundsatze: zwei Dinge, deren jedes das Doppelte von einem dritten, sind einander gleich). Hierauf ziehe man a e und b k, so sind aus eben dem Grunde das Rechteck c l = a c h k; also □ b d e c = □ b a g f + □ a c k h.

13) Das Quadrat eines Katheten ist so groß, als das Quadrat der Hypothenuse weniger dem Quadrate der andern Kathete. Sind also in einem rechtwinkligen Dreiecke zwei Linien gegeben, so kann die dritte durch Rechnung gefunden werden. Nimmt man z. B. die beiden Katheten als bekannt an, so werden diese durch die Multiplikation mit sich selbst zum Quadrat erhoben, und die beiden Quadrate zusammen addirt, welche dann das Quadrat der Hypothenuse ausmachen, aus dem man die eigentliche Länge der Hypothenuse erhält, wenn man die Quadratwurzel auszieht.

§ 2.

Die ferneren nöthigsten Lehrsätze von dem Kreise und deren Beweise.

1) Lehrsatz: Wenn in einem und dem nämlichen Kreise zwei Sehnen einander gleich sind, so sind es auch die dadurch abgeschnittenen Bögen, und umgekehrt, wenn die Bögen gleich sind, so sind es auch die Sehnen (Fig. 146).

Beweis: a. Man mache eine Sehne, a b = c d, so ist, wenn man von denselben die Halbmesser auf den Mittelpunkt zieht, a o b = c x d, weil außer den Seiten a b und c d auch die Halbmesser a o, o b, c x, x d (vergl. S. 51), welche die Dreiecke bilden, alle einander gleich sind. Da die Seiten einander gleich sind, so sind es auch die Winkel,

und folglich der Winkel x = o, also auch das Maß dieser Winkel, nämlich die Bögen a f b = c e d.

b. Sind die Bögen einander gleich, so sind es auch die Sehnen, denn zieht man wieder die Halbmesser und verbindet die Endpunkte der Bögen mit Sehnen, so sind (Fig. 147) die Winkel o und x einander gleich, weil sie gleiche Bögen zum Maße haben. Ebenso ist auch a o = c x und b o = d x als Halbmesser, folglich der eingeschlossene Winkel und zwei Seiten in beiden Dreiecken einander gleich, und also auch die dritte Seite gleich der dritten, d. i. a b = c d.

2) Lehrsatz: Wenn eine Sehne (Fig. 148), a b, durch eine Senkrechte, e c, in zwei gleiche Theile getheilt, a c, c b, und gehörig verlängert wird, so geht sie durch den Mittelpunkt des Kreises und wird dadurch zum Durchmesser.

Beweis: Man verbinde die Sehne a b und die Senkrechte e d mit andern Sehnen, a e, e b, b d, a d. Es ist demnach der Winkel o = n, die Seite a c = c b und e c = e c, oder beiden gemein, und daher beide Dreiecke congruent, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel einander gleich haben. Ebenso verhält es sich auch mit den beiden Dreiecken a c d und b c d, wo a c = b c, c d = c d und x = m, also auch diese zwei Dreiecke congruent sind. Da nun die Sehne a e = e b und a d = b d, so sind auch ihre gegenüber stehenden Bögen einander gleich, folglich a g e = e h b und a k d = b i d, also zusammen e g a k d = e h b i d. Die Linie e d theilt folglich den Kreis in zwei gleiche Theile und wird zum Durchmesser, d. h. sie geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

3) Lehrsatz: Die Winkel an der Peripherie haben den halben Bogen zum Maße, den ihre verlängerten Schenkel abschneiden.

Beweis: Hier können dreierlei Fälle vorkommen; der erste ist: wenn ein Schenkel durch den Mittelpunkt geht (Fig. 149); der zweite: wenn sich der Mittelpunkt zwischen diesen beiden Schenkeln befindet (Fig. 150); und der dritte: wenn beide Schenkel außer den Mittelpunkt fallen (Fig. 151).

Im ersten Falle ist der Winkel c (Fig. 149), wenn man die Linie c b zieht, als äußerer Winkel ebenso groß,

als die zwei innern m und n zusammen genommen. Da aber das Dreieck c m b wegen der beiden Halbmesser c b und c m gleichschenklig ist, so ist der Winkel h = n, und also m halb so groß als c. Es hat aber c den ganzen Bogen a b zu seinem Maße, folglich muß m die Hälfte desselben haben.

Im zweiten Falle ziehe man die Linie a b (Fig. 150) durch den Mittelpunkt und verbinde die Sehnen mit den Linien c d und c e, so hat man den obigen Fall doppelt. Denn es ist s noch so groß als o, und c noch so groß als n, folglich der ganze Winkel m nur die Hälfte des ganzen Winkels c, und das Maß von m der halbe Bogen e b d.

Im dritten Falle ziehe man wieder aus dem Scheitel durch den Mittelpunkt eine Linie, d a (Fig. 151), so haben, nach obigem Beispiele, die beiden Winkel m und n zusammen den halben Bogen a b c. Läßt man den Winkel n hinweg, folglich auch den Bogen a b, so bleibt für den Winkel n die Hälfte des Bogens b c.

4) Der Winkel am Mittelpunkte, Centriwinkel, ist also noch so groß, als der Winkel an der Peripherie, wenn beide auf einerlei Bögen stehen.

5) Aus Obigem ersieht man, daß alle Winkel an der Peripherie, welche auf einerlei Bögen stehen, einander gleich sind; es ist also (Fig. 152) $< a = < b$ und $< b = < c$, weil alle den halben Bogen d e zum Maße haben; und stehen sie auf dem Durchmesser (Fig. 153), so sind es lauter rechte, weil sie die Hälfte des halben Kreisbogens, d. i. 90^{0}, zum Maße haben.

6) Lehrsatz: Wenn aus dem Mittelpunkte eines um ein regelmäßiges Vieleck beschriebenen Kreises die Halbmesser in die Winkel des Vielecks, die man hier Polygonwinkel nennt, gezogen werden, so entstehen lauter gleiche Dreiecke, und die Polygonwinkel werden in zwei gleiche Theile getheilt.

Beweis: Die Seite (Fig. 154) a b = b c (oben) als Seiten eines regelmäßigen Vieleckes; die Halbmesser a o, o b und o c sind ebenfalls einander gleich; folglich die Dreiecke congruent, und der Winkel m = n, und also der Polygonwinkel x in zwei gleiche Theile getheilt.

Theilt man daher ein Paar Polygonwinkel in zwei gleiche Theile und verlängert die Theilungslinien, bis sie einander durchschneiden, so hat man den Mittelpunkt des Polygons.

7) Lehrsatz: Der Polygonwinkel ist gleich 180° weniger dem Winkel am Mittelpunkte. n + p = 180° — o (Fig. 154 unten. Vergl. S. 21, § 7).

Beweis: Die drei Winkel m n o halten zusammen 180°; es ist aber nach dem vorigen Lehrsatz m = n = p; man kann statt m den Winkel p setzen; folglich halten n p und o zusammen ebenfalls 180°, und n + p = 180° — < o.

Zusatz: Verlängert man eine Seite des regelmäßigen Vieleckes, so ist u der Nebenwinkel des Polygonwinkels n + p und also auch u = o.

8) Lehrsatz: Die Seite des regelmäßigen Sechseckes ist dem Halbmesser gleich.

Beweis: Der Centriwinkel c = 60° (Fig. 154, unten), weil 360 : 6 = 60; es bleiben also in dem Dreiecke a b c für die beiden Winkel an der Grundlinie noch 120° übrig; denn 180° — 60 = 120. Da nun das Dreieck wegen der gleichen Halbmesser gleichschenklig ist, so sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich und jeder hat die Hälfte von 120°, d. i. 60°, zu seinem Maße. Es ist also das Dreieck gleichseitig, weil gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber stehen und a b = a c. (Vergl. S. 22, § 8, 3.)

9) Aus dem Bisherigen ist leicht ersichtlich und bedarf keines Beweises, daß, je kleiner die Sehne, desto kleiner der Bogen; wenn man daher eine Sehne immer kleiner macht, so wird sie am Ende so klein, wie ihr Bogen. Auf diese Art kam man zur Berechnung des Verhältnisses des Durchmessers zur Peripherie.

§ 3.

Die nöthigen Beweise von der Gleichheit der Körper.

Was über die Gleichheit der Flächen gesagt wurde, gilt auch bei den Körpern, welche auf diese Bezug haben. Jedoch ist noch zu bemerken:

1) Die Diagonalebene, z. B. das Parallelepipedum (Fig. 155); a b c d e f g h; a b c d ist seine obere und e f g h seine untere Fläche. Von d nach b sei eine Diagonallinie, d b, gezogen, mit dieser (oder durch diese) soll ein senkrechter Schnitt nach der Grundfläche (nach h f) gemacht werden, diese gedachte Ebene (denn den Schnitt selbst kann man nicht sehen, und wenn der Körper wirklich so durchschnitten wird, so sieht man nur, daß er durchschnitten ist), welche der Schnitt zurücklegt (der

hier in der Figur schattirt ist), heißt die Diagonalebene und macht jedem der Körper eine gleiche Fläche (d b f h). Wer dieses noch nicht begreifen kann, durch die Anschauung, schneide aus einer Rübe, Kartoffel ꝛc. ein Viereck, und durchschneide es, wie oben gelehrt.

2) Lehrsatz: Ein jedes Parallelepipedum wird durch die Diagonalfläche (Fig. 155, d b f h) in zwei gleiche dreieckige Prismen getheilt. (Vergl. S. 20, 1.)

Beweis: (Obige Figur.) Durch die Diagonalebene d b f h wird das Parallelepipedum a b c d e f g h in zwei gleiche (dreieckige) Prisma a d b f g h und d b c e f h getheilt, weil a b d = a c d gleiche Grundflächen und auch gleiche Höhen, d h, haben. Mithin ist jedes dreiseitige Prisma die Hälfte eines Parallelepipedums von gleicher Höhe und doppelter Grundfläche. (Vergl. S. 53, 7, und Tschbch. S. 23, 57 ꝛc.)

3) Eine jede Pyramide ist der dritte Theil von einem Prisma, welches gleiche Grundfläche und Höhe mit jener hat. Mithin läßt sich auch ein gleichseitiges Prisma in drei gleiche dreieckige Pyramiden theilen.

Beweis: Man ziehe in die Seitenflächen des Prisma's (Fig. 156) die Diagonalen, a f, a e, e c, die Ebenen, welche durch je zwei solcher Diagonalen gelegt werden (vergl. 1), nämlich a e c und a e f, theile das Prisma in die drei Pyramiden a e d f, wovon e d f die Grundfläche ist; e b a c, wovon b a c die Grundfläche, und e a c f. Die beiden ersten haben gleiche Grundflächen und gleiche Höhen (e d f = b a c und b e = a d). Bei der dritten aber wäre die Grundfläche a c f und die Spitze in e. Man kann aber auch bei der ersten Pyramide, a e d f, d a f als Grundfläche annehmen, deren Spitze dann ebenfalls in e fällt. Es ist also a c f = d a f (a c = d f, a d = c f und a f beiden gemein) und die Spitzen liegen in einem Punkte, mithin sind die Höhen gleich; also ist auch die dritte Pyramide der ersten (sowie die zweite), und daher alle drei einander gleich.

Statt eines dreiseitigen Prisma's kann man auch ein vielseitiges setzen, weil man jenes in dreiseitige zerlegen kann. Z. B. ein reguläres Sechseck enthält drei gleiche sechseckige Pyramiden, welche mit jenen gleiche Grundflächen

und Höhen haben; es enthält sechs gleiche dreieckige Prismen und also 18 dreiseitige (nach obigen Bedingungen) Pyramiden.

4) Was im Vergleiche des Prisma's zur Pyramide, und umgekehrt, gilt, findet auch zwischen Cylinder und Kegel statt. Da man sich einen Cylinder als ein Prisma von unzählig vielen Seiten denken kann, so läßt sich auch der Kegel als eine Pyramide von unzählig vielen Seiten vorstellen und gilt daher obiger Beweis.

5) Das Verhältniß der Kugel zum Cylinder. Da man das genaue Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie eines Kreises, und durch dieses das Verhältniß des Quadrates des Durchmessers des Kreises zur Kreisfläche kennt, so berechne man einen Cylinder (wie oben gesagt), schneide eine Kugel in sehr viele Theile, von welchen dann jeder Theil sich als abgeschnittener Kegel berechnen läßt, oder verfahre, als wenn sie so geschnitten wäre, deren Summe dann nahe $^2/_3$ vom Inhalte des Cylinders geben wird. Noch genauer aber geschieht es durch das Tariren beider Körper (vergl. S. 49, § 24), nämlich eines Cylinders und einer Kugel von gleichem Durchmesser und gleicher Höhe. Ein höherer Beweis ist für hierher nicht nothwendig.

III. Abschnitt.

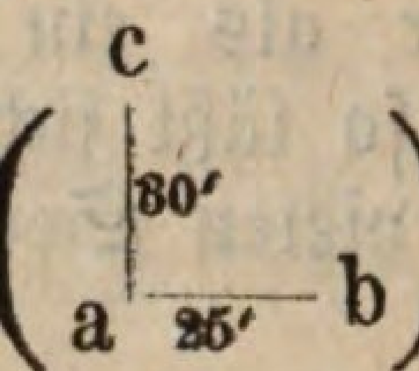
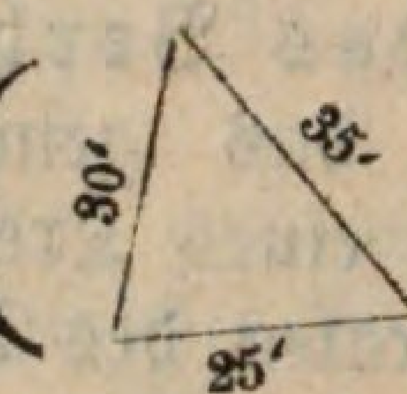
§ 1.

Von der Feldmeßkunst.

Um für Manchen hauptsächlich die Lehre von den Dreiecken noch anschaulicher zu machen, folgt hier aus der Feldmeßkunst:

1) Eine gerade Linie gegen einen gegebenen (gewählten) Punkt hin auszustecken, ist bekannt*).

*) Wenn man sich eine gute Meßschnur bereiten will, welche nicht eingeht 2c., so muß man sie in warmes Wasser legen und trocknen lassen, nachdem in Oel kochen, abermals trocknen lassen, hierauf in warmes Wasser legen und wieder herausnehmen und durchstreifen (aber nicht mit der bloßen Hand). Die Meßschnur, sowie die Meßruthe und Meßkette wird in Ruthen abgetheilt, die erste (oder letzte) Ruthe auch in Fuß und, wenn erforderlich, der erste Fuß auch in Zoll.

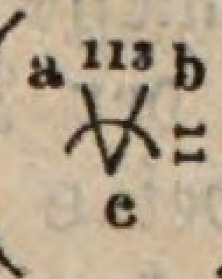
2) Einen dreieckigen Platz ohne Instrument aufzunehmen (vergl. S. 51, § 25). Man messe von dem dreieckigen Platze eine Linie z. B. ab; sie sei 25′ lang; diese trage ich aus freier Hand in der Richtung, wie sie liegt, in ein Notizbüchlein (a|—25′—|b). Nun messe ich die Linie bei a oder b; diese sei 30′ (); und dann die dritte Linie, welche 35′ lang sei (). Zu Hause zeichne man alsdann das Dreieck nach dem verjüngten Maßstabe (indem man einen Zoll oder eine Linie ꝛc., je nachdem man die Zeichnung groß oder klein darstellen will, als einen wirklichen Fuß oder Ruthe, natürlich auf ein und demselben Maßstabe, annehmen kann), nach welchem ich dann auch die Höhe des Dreieckes, wenn es berechnet werden soll, bestimmen kann. (Vergl. S. 14, Anmerk. **); ferner S. 51 § 1.)

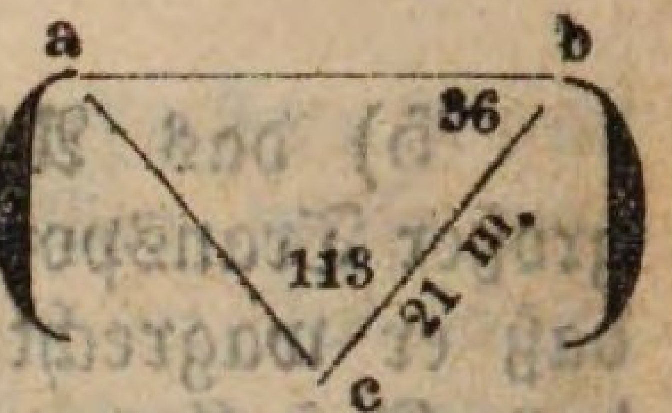
3) Vier- und vieleckige Flächen aufzunehmen. Wenn die Flächen nicht reine Quadrate oder Rechtecke sind (vergl. S. 19, § 6), so zerlege man sie in lauter Dreiecke (S. 26, Anmerk. *), vermesse sie, wie oben gelehrt, und trage dann, bei der Aufzeichnung nach dem verjüngten Maßstabe, eines neben das andere nach ihrer natürlichen Lage (s. 2) auf; so erhält man die gewünschte Fläche. Die Diagonalien oder Hilfslinien kann man nach vollendeter Zeichnung ausreiben, wenn es erforderlich ist. Ebenso wird umgekehrt verfahren, wenn man nach einem Plane eine Figur auf das Feld ausstecken soll. Dieses wird keiner weiteren Erklärung bedürfen.

4) Winkel aufzunehmen. Es ist leicht erklärbar, daß man die Meßschnur, wenn man am einen Ende einen Stift von Holz oder Eisen befestigt und in einem beliebigen Punkte der Schnur einen zweiten, als einen Zirkel gebrauchen kann, und dann das nämliche Verfahren, wie es schon gelehrt, auf dem Felde, wie auf dem Papier gebrauchen kann. Allein dieses ist nicht überall anwendbar, daher hat man

5) das Astrolabium (Fig. 157). Dieses ist ein großer Transporteur, der auf einem Gestell so angebracht ist, daß er wagrecht (wie ein Tischchen) und auch auf die Seite des Gestelles gewendet werden kann, wie es die Figur zeigt. In der Mitte desselben (D) ist ein Lineal (E F) angebracht, welches man links und rechts bewegen kann, und auf dessen Mitte vorn und hinten ein Klötzchen angebracht ist, wovon jedes ein Löchelchen hat, um durchsehen (visiren) zu können, welche Diopteru heißen (g h). Je größer man dieses Astrolabium macht (den Halbkreis), desto größer werden die Grade und in desto mehr kleinere Theile (Minuten, Secunden 2c.) kann man einen Grad theilen, und in je mehr kleinere Theile (Unterabtheilungen) die Grade eingetheilt sind, desto genauer kann man die Winkel damit messen. Dieses Instrument ist seiner Bequemlichkeit wegen zu empfehlen; auch kann man es sich im Nothfall selbst verfertigen. Von andern größeren Instrumenten kann hier keine Rede sein.

6) Winkel mit dem Astrolabium zu messen. Das Astrolabium muß so gestellt werden, daß der Mittelpunkt (D) senkrecht oberhalb des Endpunktes der Linie zu stehen kommt, wo der Winkel gemessen oder aufgetragen werden soll (d. h. in die Spitze des Winkels) und der Durchmesser desselben (A B) auf einen Schenkel des Winkels fällt. Alsdann verschiebe man das in D bewegliche Lineal (E F) so weit, indem man durch die Dioptern (g und h) visirt, bis man das Aeußerste des andern Schenkels sieht, nämlich den Punkt, nach dem der eingebildete oder zu ziehende Schenkel läuft, worauf man die Grade zählt, welche das Lineal abschneidet. (Vergl. S. 18 n, 1, 2. 3.)

7) Die Entfernung zweier Orte zu messen (a b Fig. 158). Man kann aber nur von dem Standpunkt c aus zu b kommen und zu a ist kein Zugang möglich. Man messe die Standlinie c b = 21 Meter; hierauf messe man den Winkel b c a (stelle das Instrument, wie oben gelehrt, in c, Diameter (A B) nach b, Diopternlineal nach a), so erhält man einen Winkel von 113° (); alsdann den Winkel bei b (natürlich das Instrument in b gestellt) und den Durchmesser des Astrolabiums (A B) nach c und das Lineal von A nach B geschoben, bis die Dioptern den Ortspunkt (a)

haben, so erhält man einen Winkel von 36°. 

Hier wurde der Millimeter = 1 Meter angenommen. Nach diesem wird sich die Zeichnung, wie sie Fig. 158 in verjüngtem Maßstab zeigt, darstellen. Dann messe man die Linie a b mit dem verjüngten Maßstab, welche = 38 Millimeter; also ist die Entfernung von a nach b im wirklichen Maß 38 Meter lang. Wie die Linie a b, so ist auch zugleich die Linie c a bestimmt rc. Das Ganze ist also die Zeichnung eines Dreieckes, von welchem eine Linie und 2 Winkel bekannt sind rc. (Vergl. S. 52, 3.)

8) Die Entfernung zweier Gegenstände zu messen, wo man zu keinem von beiden kommen kann (Fig. 159). Da man z. B. nicht näher als bis an den Punkt c an beide Orte kommen kann, so messe man sich eine beliebige Standlinie, c d, = 20'; hierauf messe man aus c den Winkel d c b, c = 90°; nachdem aus d den Winkel b d c; dann ebenfalls aus d den Winkel c d a und wieder aus c den Winkel d c a, wodurch sich nach der Aufzeichnung die Dreiecke c d b und c d a ergeben. Nun verbinde man die Punkte a b, wodurch die Entfernung von a nach b, wie oben gelehrt, bestimmt ist.

9) Durch das Dreieck d c b in obiger Figur ist auch die Breite des Flusses (c e) bestimmt, denn der Winkel d c b ist ein rechter und die Linie c b muß daher in ganz gerader Richtung über den Fluß gehen (c e wird natürlich mit dem verjüngten Maße gemessen rc.).

10) Eine Höhe zu messen (Thurm rc.), zu der man von einem gewählten Standpunkte aus kommen kann (Fig. 160). Um die Höhe des Thurmes, a b, obiger Figur zu finden, sei c der angenommene Standpunkt. Man richte das Astrolabium in die Höhe, daß der Halbkreis gegen oben zu stehen kommt, der Durchmesser in gerader Linie gegen den zu messenden Gegenstand hin, hier gegen e, und visire (durch die Diopteru) nach a, so erhält man den Winkel a d e; hierauf messe man die Linie d e und c d. Da alle Gegenstände in der Regel auf der Erde senkrecht stehen, so ist der Winkel bei e ein rechter; mithin sind zwei Winkel und eine Linie bekannt. Nun ziehe man (nach verjüngtem Maßstab) a d e, errichte in e eine Senkrechte, ziehe sie, bis sie d a durchschneidet, so hat man die

Höhe e a, und addire die Höhe c d dazu, so hat man die Höhe (a b) des zu messenden Gegenstandes gefunden.

11) **Eine Höhe ohne Instrument zu messen**, z. B. einen Baum (a b, Fig. 160). Man wähle einen Standpunkt, c, stecke in c einen genau abgemessenen Stab, welcher 5′ hoch ist, über der Erde, an welchen ein bewegliches Lineal (f g) angebracht ist; man messe von c gegen b hin 10′ ab und stecke eine lange Stange hin, l m; nun stelle man Jemand an die Stange mit einem Stock ꝛc.; man gehe selbst an das Lineal, richte es genau auf den Punkt a, und lasse den Mann so weit an der Stange hinauf fahren, l e, bis er an den Punkt kommt (e), der mit d und a in einer Linie liegt. Hierauf messe die Länge l e, dann die Linie c b (= 20′). Alsdann trage man c l, l b (d. i. c b), c d, l e genau nach dem verjüngten Maßstab auf, ziehe d e, verlängere c l gegen x und d e gegen x und gegen a, ziehe auf b eine Senkrechte (vergl. S. 6), bis x e, a durchschneidet, so ist x a die gesuchte Höhe. (Durch die Punkte e d und die Grundlinie x b ergibt sich der Winkel bei x von selbst und der Winkel bei b ist ein rechter ꝛc.)

12) **Eine Höhe, zu welcher man nicht kommen kann, zu messen** (Fig. 162, a b). Man wähle sich in einer Entfernung zwei Standpunkte, e g (je höher der zu messende Gegenstand ist, desto weiter wähle man sie von einander), messe den Winkel bei d und f und die Grundlinie e g (= d f); hierauf mache man die Zeichnung, wie schon bekannt, wo sich die verlängerten Schenkel von den Winkeln a d f, a f c schneiden (in a), fälle dann eine Senkrechte, a c, verlängere d f bis c, und messe die Linie c b und addire die Höhe e d dazu = a b. Wenn e g in einer Unebene liegen, so muß die Höhe c b wie a c gesucht werden.

13) Sollte der Fall eintreten, daß ein Winkel nicht gemessen werden kann, so werden die Schenkel rückwärts verlängert (oder so gedacht), und der äußere Winkel gemessen und dessen Maß von 180° abgezogen, so bleibt der zu messende Winkel als Rest. (Vergl. § 3.)

14) **Eine Höhe nach deren Schatten zu messen.** Will man die Höhe eines Baumes ꝛc. nach seinem Schatten berechnen, so mache man sich einen Stab von beliebiger Höhe, z. B. 5′, stelle ihn gerade auf, messe seinen Schatten — dieser mißt z. B. 8′ — und dann den Schat-

ten des zu messenden Baumes — dieser messe 40′. Dieses muß aber schnell geschehen, weil die Sonne gewöhnlich sich keine halbe Stunde an einem Platze aufhält. Hierauf frage man: wie viel natürliche Fuß Länge geben 40′ Schattenlänge, wenn 8′ Schattenlänge 5 natürliche Fußlängen geben?

$$\text{d.: } 8' : 40 \quad 5 : x = \frac{40 \times 5}{8} = \frac{5 \times 5}{1} = 25 \text{ Fuß;}$$

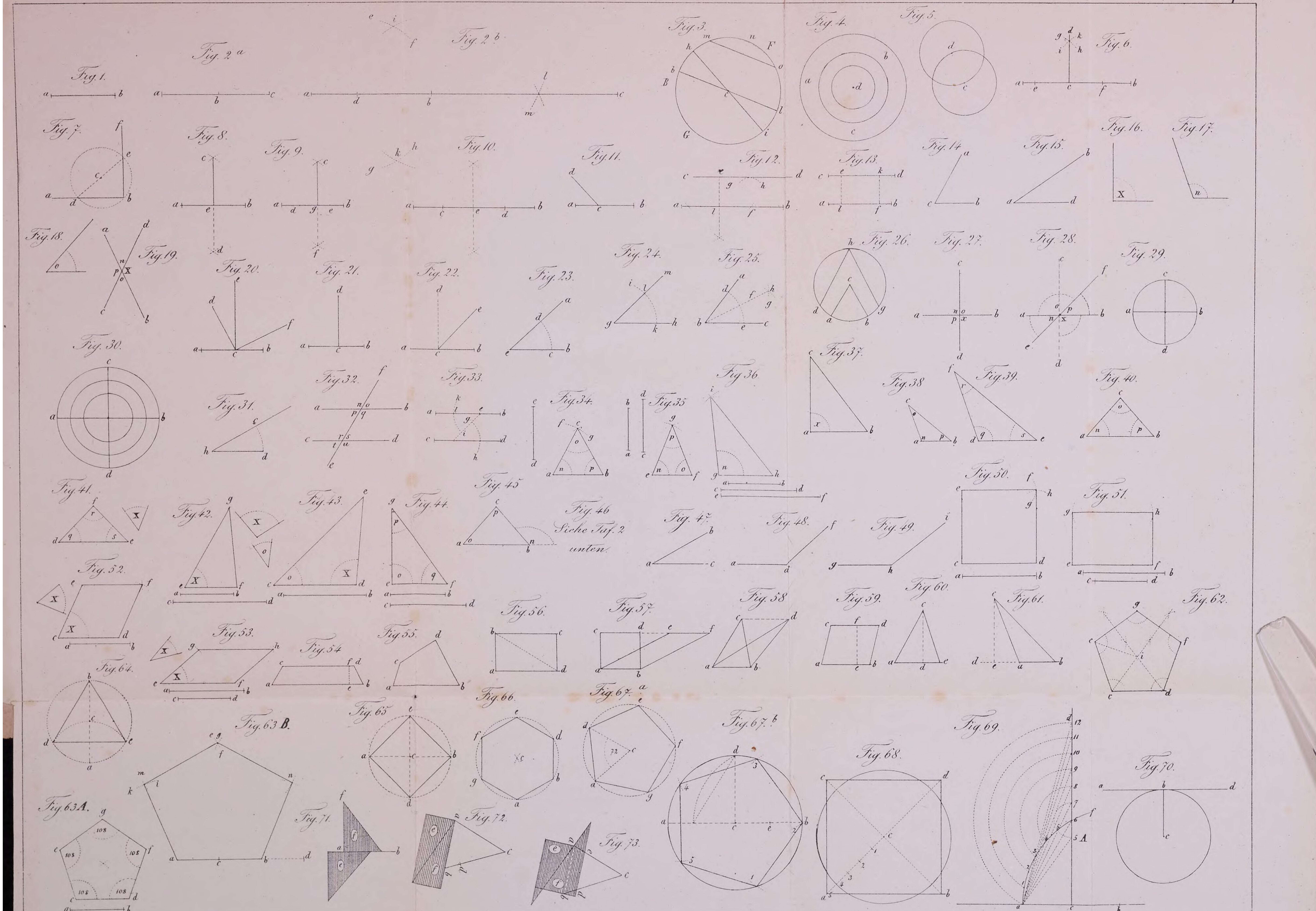
mithin ist die Länge des Baumes 25′. Oder kurz, man multiplicire die Länge des Schattens des zu messenden Gegenstandes mit der natürlichen Länge des Stockes und dividire das Produkt durch die Schattenlänge des Stockes; d. i. 40′ × 5 = 200 : 8′ = 25′.

16) Die Entfernung zweier Berge zu finden Dieses ist das nämliche Verfahren, wie unter 8, Seite 64, gelehrt wurde (Fig. 159), wobei zu bemerken ist, daß man nur ein Dreieck zu suchen hat, entweder Dreieck c d b oder Dreieck c d a; in ersterem ist c b, im zweiten d a die Entfernung. In jedem ist die Grundlinie c d und die an derselben liegenden Winkel bei c und d bekannt. Nach Diesem kann man auch Schußweiten, sowohl nach Schritt- als nach dem Fußmaaß bestimmen.

16) Die Höhe eines Berges &c. zu finden. Man lege eine lange Latte wagrecht an den höchsten Punkt (Fig. 163 a) an, welches mit Hülfe einer Wasserwaage geschieht, lasse dann einen Senkel (an einer Schnur) vorn an der Latte auf eine Abstufung (oder beliebigen Punkt) der Höhe, b, herabfallen und messe die Länge desselben (dieses ist die Höhe von der Spitze bis zu diesem Punkt); nun lege man die Latte, wie oben, an diesen Punkt an und verfahre wieder wie oben. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis der Senkel an den Fuß des Berges fällt. Hierauf addire man sämmtliche erhaltenen Längen zusammen′ deren Summe die Höhe des Berges &c. gibt, d. i. hier 40′ + 30′ + 20′ + 15′ = 105′ = a c.

17) Grenzen, Säume von Waldungen &c., zu denen man von innen nicht kommen kann, werden von außen gemessen, und werden keiner weiteren Erklärung bedürfen, wenn man das Bisherige wohl aufgefaßt hat. Außerdem überlege man § 13 S. 26 und § 14, auf S. 65.

Taf. I.



Gezeichnet von M. Nast 1863.

Lith. von S. Bühler in Mannheim.